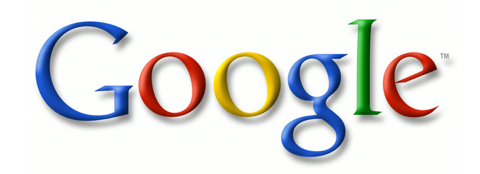
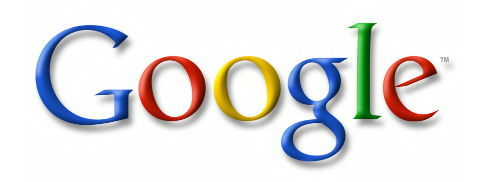
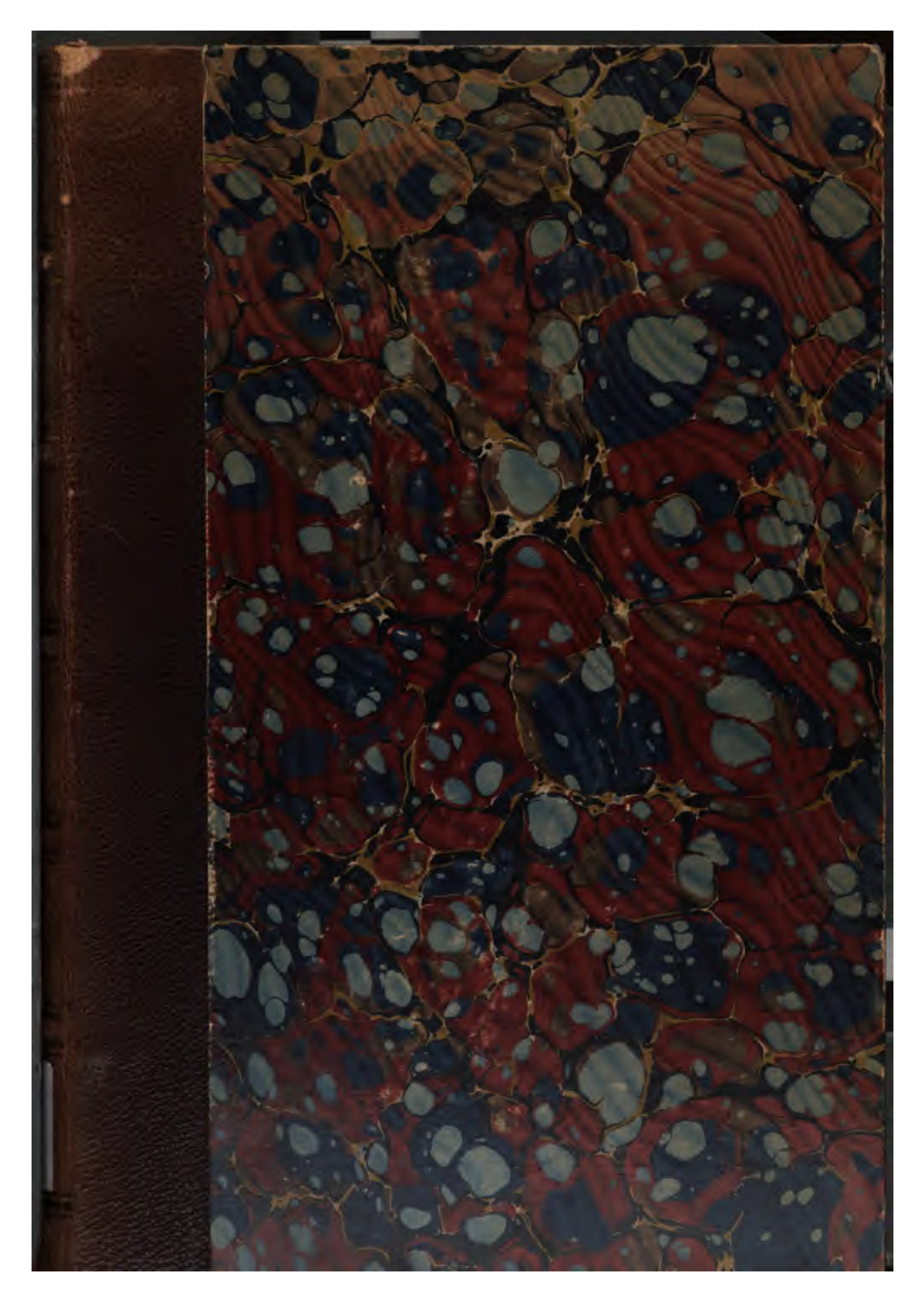
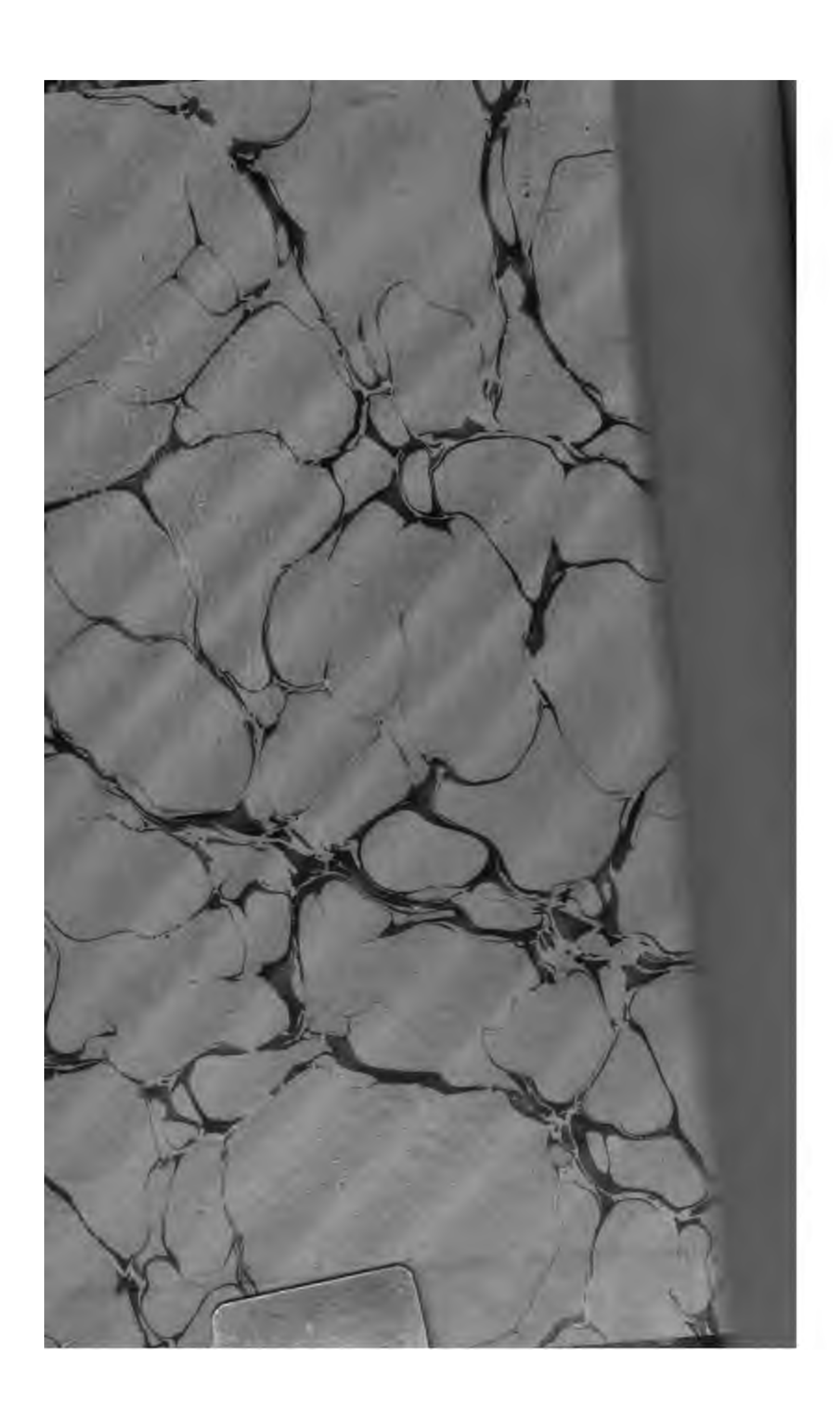
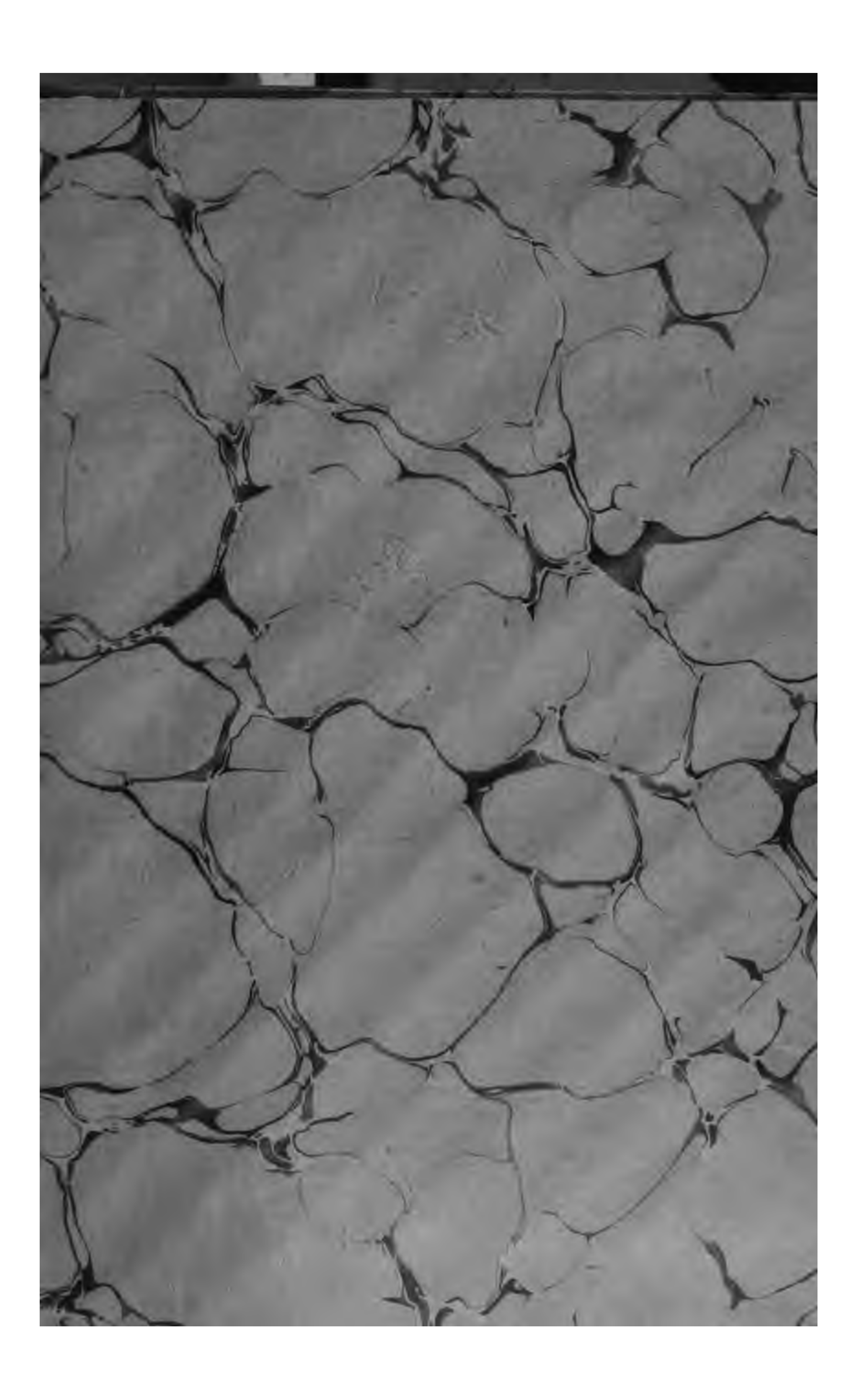

Google









INTRODUCTION A LA THÉORIE

DES

NOMBRES TRANSCENDANTS

ET DES

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS,

PAR

Edmond MAILLET,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



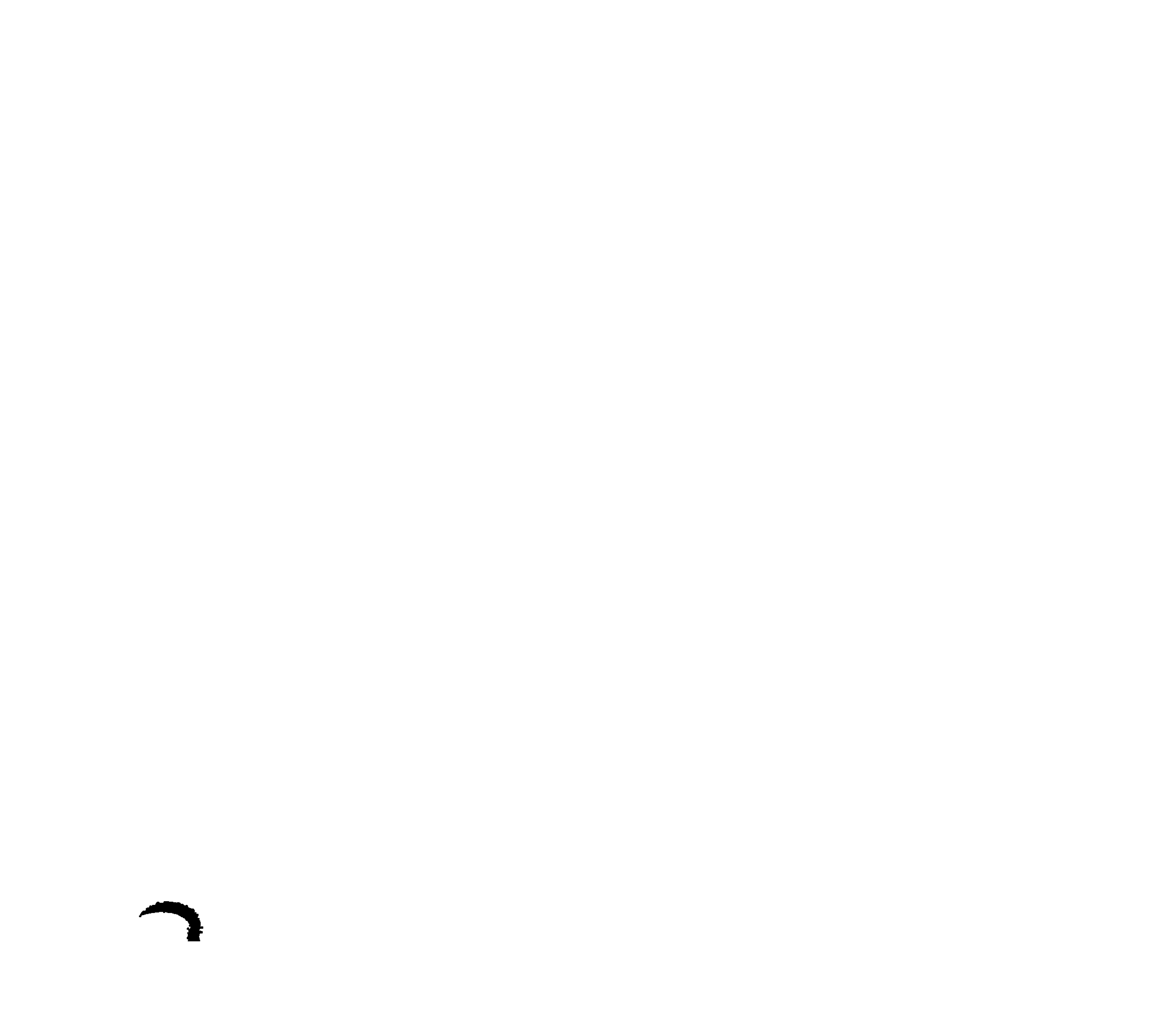
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1906



INTRODUCTION A LA THÉORIE

DES

NOMBRES TRANSCENDANTS

ET DES

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS.

DU MÊME AUTEUR.

Mécanique et Physique du globe. — Essais d'hydraulique souterraine et fluviale. — Paris, Hermann, 1905, 270 pages in-8 .... 11 fr.

INTRODUCTION A LA THÉORIE

DES

NOMBRES TRANSCENDANTS

ET DES

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS,

PAR

Edmond MAILLET,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1906

AVIS AUX LECTEURS.

Dans cet Ouvrage d'Arithmétique, j'ai cherché à exposer, sous une forme aussi simple que possible, soit certains résultats connus, soit des résultats nouveaux [1] relatifs à la théorie des nombres transcendants, c'est-à-dire des nombres qui ne sont racines d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. J'espère avoir pu, en ne donnant cependant que des propriétés [2] en grande partie nouvelles dans la forme ou dans le fond, rendre mon travail presque entièrement accessible aux étudiants. Une partie peut être lue par un élève de Mathématiques spéciales, le tout par un polytechnicien ou un licencié ès sciences mathématiques.

Pour ne pas faire un Ouvrage trop volumineux, je me suis dispensé de traiter en détail bien des questions qui appellent des recherches plus étendues ou qui ont été approfondies ailleurs. Afin que l'on puisse se mettre au courant de la littérature du sujet, si on le désire, ce qui n'est pas nécessaire pour la lecture de l'Ouvrage, j'ai ajouté un index bibliographique. Il est court, car l'étude des nombres transcendants est un sujet presque entièrement neuf, où il y a d'autre part beaucoup à faire.

Comme les matières de cette Introduction se rattachent par plus d'un point à la théorie des fonctions entières, j'ai complété l'index

---

[1] Ils ont fait l'objet de quatre communications à l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes rendus*, 28 août 1905, 12 février, 2 avril, 2 juillet 1906). *Voir* encore *Mém.* et *C. R. du Congrès de Lyon* (Ass. franç. pour l'avanc. des Sc., 1906) et *Bull. Soc. Math.*, 19 juillet 1906.

[2] J'ai dû toutefois reproduire, avec peu de changements, des démonstrations connues de la transcendance de e et π.

91200

bibliographique par des renseignements très sommaires suffisants pour permettre au lecteur d'aborder cette dernière; enfin, j'y ai signalé quelques Mémoires relatifs aux fonctions transcendantes, qui présentent certaines analogies avec les nombres transcendants.

Je crois utile de résumer ci-dessous le contenu du Volume :

CHAPITRE I. — Je rappelle d'abord quelques résultats de la théorie des fractions continues arithmétiques, dont je fais grand usage, en esquissant une classification par ordres de ces fractions, d'après la rapidité de croissance des quotients incomplets.

CHAPITRE II. — J'établis, d'après Liouville, un théorème fondamental qui donne une condition suffisante pour qu'un nombre, considéré comme limite d'une suite de fractions rationnelles ordinaires, soit transcendant; j'appelle *nombres transcendants de Liouville* les nombres qui satisfont à cette condition. J'étends ce théorème au cas où les fractions sont des polynomes formés avec un nombre algébrique et à coefficients rationnels.

CHAPITRE III. — On peut trouver des catégories étendues de nombres de Liouville (je les appelle *nombres correspondants*) qui, par addition, soustraction, multiplication ou division, ne donnent que des nombres rationnels ou transcendants de Liouville de même catégorie. Les nombres transcendants N de Liouville peuvent être caractérisés par une propriété remarquable dont ils sont seuls à jouir parmi les nombres irrationnels : il y a une infinité des réduites de N^p (p entier quelconque) qui sont puissances $p^{\text{ièmes}}$ de réduites de N. Ceci me permet de définir, dans chaque catégorie, les nombres qui sont des puissances $\mu^{\text{ièmes}}$ exactes (μ entier) d'un nombre de la même catégorie. Toutes les irrationnelles $\frac{pI+q}{p'I'+q'}$ (p, q, p', q' entiers, $pq'-qp'\neq 0$) sont de même ordre que l'irrationnelle I.

CHAPITRE IV. — Je montre ensuite que l'on peut considérer de manières extrêmement variées tout nombre réel rationnel, algébrique

ou transcendant comme racine de fonctions $f(x)$, où $f(x)$ est une série ou une fraction continue à coefficients rationnels. Ainsi, il y a une infinité de familles de ces séries, par exemple de fonctions entières de même ordre, telles que les racines des séries de la famille donnent tous les nombres possibles, réels ou même imaginaires. Inversement, tout nombre réel est, d'une infinité de façons, représentable par des séries ou des fractions continues $f(x)$ pour x rationnel.

Chapitre V. — J'étudie encore ce que j'appelle les *fonctions génératrices $f(x)$ de nombres transcendants;* je détermine des catégories étendues de pareilles fonctions, à coefficients rationnels, pour lesquelles $f(x)$ est transcendant dès que x est rationnel ou algébrique ($x \neq 0$) et même des catégories de fonctions $f, f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$, telles que toute fonction analogue à

$$\Phi(x) = f(f_1(f_2(\ldots(f_k(x))\ldots)))$$

est transcendante dès que x est rationnel > 0.

Chapitre VI. — J'indique, en me basant sur la théorie des fractions continues arithmétiques, un moyen de distinguer certaines catégories de nombres. J'en conclus ainsi que les fractions continues quasi-périodiques à quotients incomplets limités et le nombre e, qui sont des nombres transcendants, ne sont pas des nombres de Liouville.

Chapitre VII. — Je m'occupe des fractions décimales et des fractions continues quasi-périodiques : ce sont des nombres transcendants, au moins sous certaines conditions. Si I est une fraction continue quasi-périodique, il en est de même, dans des cas étendus, de pq^{-1}I et I^p (p, q entiers).

Chapitre VIII. — Je signale des familles de séries à coefficients rationnels telles que leurs racines, comme celles des équations algé-

briques à coefficients entiers, ne peuvent présenter, dans la partie décimale de leur développement, des suites de zéros d'étendue trop rapidement croissante au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la virgule. Une propriété corrélative a lieu pour les quotients incomplets du développement en fraction continue des racines : ceux-ci ne peuvent croître trop vite.

Chapitre IX. — Je donne une démonstration connue de la transcendance des nombres e et π, et je traite la question de l'impossibilité de la quadrature du cercle, en expliquant dans quel sens il faut l'entendre.

Chapitre X. — Dans les Chapitres X à XII, j'envisage l'extension aux séries à coefficients rationnels de plusieurs propriétés des polynomes à coefficients rationnels. Certaines se conservent toujours, d'autres ne restent vraies que pour des types particuliers de séries, dont je forme quelques-uns. On arrive toutefois à des analogies plus profondes et plus habituelles quand on considère, non plus les séries à coefficients rationnels, mais les séries dont les coefficients sont formés rationnellement avec les nombres de certains ensembles, par exemple avec des nombres de Liouville correspondants.

Chapitre XI. — Je passe aux fonctions symétriques des racines des séries à coefficients rationnels, ce qui me conduit à proposer de définir comme entiers transcendants, sous réserves de certaines vérifications ultérieures, des catégories de nombres transcendants : ainsi π et $L2$ seraient des entiers transcendants.

Chapitre XII. — Je termine en montrant certaines difficultés de l'extension aux fonctions entières à coefficients rationnels de la notion connue de réductibilité pour les polynomes à coefficients entiers; incidemment j'établis un résultat très général relatif à

la densité des racines des fonctions entières dites d'*ordre zéro* (applicable à toutes celles d'indice $\geqq 2$).

Note I. — Je donne des indications sur certains modes de classification des fonctions entières analogues aux procédés de classification des fractions continues arithmétiques et sur les groupes de fonctions entières.

Note II. — C'est un complément aux Chapitres VI et VII. J'y indique par exemple des critères pour reconnaître si un nombre positif donné par son développement en fraction continue est un nombre I de Liouville; dans des cas étendus, le nombre décimal I et la fraction continue $\sqrt{I}$ sont quasi-périodiques, e^I, a^I (a entier), I^I sont transcendants.

Note III. — Elle est relative aux analogies entre les fonctions transcendantes et les nombres transcendants.

Note IV. — Elle comprend la bibliographie dont j'ai parlé plus haut.

Je signale dans mon Ouvrage de nombreux sujets d'études, souvent abordables, relatifs à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions, théorie où il y a, je pense, beaucoup à faire (*voir,* en particulier, p. 161-164 et p. 273). De plus, la Note II, sur les fonctions transcendantes et hypertranscendantes, peut être la base de travaux étendus.

Bourg-la-Reine, février-août 1906.

INTRODUCTION A LA THÉORIE

DES

NOMBRES TRANSCENDANTS

ET DES

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS.

CHAPITRE I.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS CONTINUES.

Soit la quantité

(1) $$I_n = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n,$$

ou encore

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

On a, par définition,

$$I_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0}, \qquad I_1 = a_0 + 1 : a_1 = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{P_1}{Q_1},$$

$$I_2 = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 = a_0 + 1 : \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{P_2}{Q_2},$$

....,

$$I_j = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_j = \frac{P_j}{Q_j},$$

.............................,

---

(1) Pour plus de détails au sujet de la théorie des fractions continues, consulter LEGENDRE, *Théorie des nombres*, t. I, 3e édition, 1830; SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, 5e édition, Gauthier-Villars; 1885. Il y a toujours profit à lire Legendre, et aussi Lagrange, ou au moins à parcourir leurs Œuvres.

où

$$(2)\quad \begin{cases} P_0 = a_0, & P_1 = a_0 a_1 + 1, & P_2 = a_0 a_1 a_2 - a_0 - a_2 = P_1 a_2 + P_0, & \ldots, \\ Q_0 = 1, & Q_1 = a_1, & Q_2 = a_1 a_2 \quad - 1 \quad = Q_1 a_2 + Q_0, & \ldots, \end{cases}$$

P_j, Q_j étant des polynomes en $a_0, a_1, \ldots, a_j$. I_j est ce qu'on appelle la *réduite de rang ou d'ordre j de* I_n. I_n est une *fraction continue limitée,* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les *quotients incomplets.*

On peut évidemment considérer des *fractions continues illimitées*

$$I = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_n + 1 : \ldots :$$

cette fraction, par définition, aura pour valeur la limite de I_n quand n croît indéfiniment, si elle existe. Dans ce dernier cas, on dira que la fraction continue est *convergente.*

$$x_n = a_n + 1 : a_{n+1} + \ldots$$

est alors ce qu'on appelle le *quotient complet de rang ou d'ordre n de* I.

1° *On a*

$$(3)\qquad P_n = P_{n-1} a_n + P_{n-2}, \qquad Q_n = Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}.$$

En effet, ceci a lieu, pour $n = 2$, d'après (2); j'admets que ceci ait lieu pour $n = 1, 2, \ldots, m$. On a

$$I_{m+1} = \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}},$$

I_{m+1} se déduit de I_m en y remplaçant a_m par $a_m + 1 : a_{m+1}$,

$$I_m = \frac{P_m}{Q_m} = \frac{P_{m-1} a_m + P_{m-2}}{Q_{m-1} a_m + Q_{m-2}},$$

$$I_{m+1} = \frac{P_{m-1}(a_m + 1 : a_{m+1}) + P_{m-2}}{Q_{m-1}(a_m + 1 : a_{m+1}) + Q_{m-2}} = \frac{a_{m+1}(P_{m-1} a_m + P_{m-2}) + P_{m-1}}{a_{m+1}(Q_{m-1} a_m + Q_{m-2}) + Q_{m-1}},$$

$$I_{m+1} = \frac{P_m a_{m+1} + P_{m-1}}{Q_m a_{m+1} + Q_{m-1}},$$

d'où, par définition de P_{m+1} et Q_{m+1},

$$P_{m+1} = P_m a_{m+1} + P_{m-1}, \qquad Q_{m+1} = Q_m a_{m+1} + Q_{m-1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° *On a*

$$(4)\qquad P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = (-1)^n$$

et, par suite, si les a_j sont entiers réels, P_n *et* Q_n *sont des entiers premiers entre eux.*

En effet, d'après (3),

$$\begin{aligned} &P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} \\ &\quad = (P_na_{n+1} + P_{n-1})Q_n - P_n(Q_na_{n+1} + Q_{n-1}) \\ &\quad = P_{n-1}Q_n - P_nQ_{n-1} = \ldots = (-1)^{n-1}(P_2Q_1 - P_1Q_2) = (-1)^n, \end{aligned}$$

d'après (2).

3° *Si a_m est réel* > 0 *et si, à partir d'une certaine valeur* ν *de n, le nombre a_n est* $\geqq 1$, *la fraction continue* I *est convergente.*

En effet, quand $n \geqq \nu$, $a_n \geqq 1$; d'après (3),

$$Q_n \geqq Q_{n-1} + Q_{n-2} > 2Q_{n-2};$$

soit q le plus petit des deux nombres $Q_{\nu-1}$ et $Q_{\nu-2}$; on a

$$\begin{array}{ll} Q_\nu \geqq 2q, & Q_{\nu+1} > 2q, \\ Q_{\nu+2} > 2Q_\nu \geqq 2^2q, & Q_{\nu+3} > 2Q_{\nu+1} > 2^2q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_{\nu+2j} > 2^{j+1}q, & Q_{\nu+2j+1} > 2^{j+1}q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

et Q_n croît indéfiniment avec n. D'après (4),

$$I_{n+1} - I_n = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n Q_n^{-1} Q_{n+1}^{-1}$$

a pour limite zéro quand n croît indéfiniment. De plus

$$Q_n > 2^{\frac{n-\nu+1}{2}}q, \qquad Q_nQ_{n+1} > 2^{n-\nu+1}q^2;$$

$$I_{n+1} = I_0 + \sum_0^n (I_{m+1} - I_m),$$

lorsque n croît indéfiniment, tend vers une limite, à savoir la valeur de la série convergente

$$I = I_0 - \sum_1^{\infty} (I_{n-1} - I_n),$$

qui est précisément la valeur de I.

4° *On a*

$$(5) \qquad I = \frac{P_n x_{n+1} - P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} - Q_{n-1}}.$$

En effet, il suffit de remarquer que I se déduit de

$$I_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_{n+1} - P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} - Q_{n-1}}$$

en y remplaçant a_{n+1} par x_{n+1}.

Ce qui précède ne suppose d'ailleurs nullement, en général, que les a_n soient entiers. Je vais maintenant ne considérer que des valeurs *positives entières* des a_n : les fractions continues correspondantes sont dites des *fractions continues arithmétiques* [1].

5° I *est compris entre* I_{n+1} *et* I_n *et, de plus,*

$$(6) \qquad |I - I_n| < |I - I_{n-1}|.$$

En effet, d'après (5),

$$x_{n+1}(Q_n I - P_n) = P_{n-1} - Q_{n-1} I,$$

$$x_{n+1} \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \frac{I_{n-1} - I}{I - I_n} = x_{n+1}\left(a_n + \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}\right) > 1,$$

---

(1) En général, *une fraction continue arithmétique* est une expression de la forme

$$I = a_0 + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 + \ldots - b_n : a_n + \ldots,$$

où les quantités $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ont des valeurs numériques réelles ou imaginaires; une fraction continue algébrique est une expression de la même forme, où les a_i et les b_i sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Quand les b_i sont tous égaux à 1, les considérations et les formules des quatre premiers numéros s'appliquent évidemment aux deux catégories de fractions continues.

d'après (3), puisque $x_{n+1} \geqq a_{n+1} \geqq 1$, $a_n \geqq 1$. (6) en résulte de suite, et $I - I_{n-1}$, $I - I_n$ sont de signes contraires.

6° *On a*

$$(7) \qquad (2 Q_n Q_{n+1})^{-1} < |I - I_n| < (Q_n Q_{n+1})^{-1}.$$

En effet, d'après ce qu'on vient de voir et (4),

$$|I - I_n| < |I_{n+1} - I_n| = (Q_n Q_{n+1})^{-1};$$

de même

$$2|I - I_n| > |I_{n+1} - I| + |I - I_n| = |I_{n+1} - I_n| = (Q_n Q_{n+1})^{-1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

7° *Si* $\left|I - \frac{A}{B}\right| < |I - I_{n+1}|$, $\frac{A}{B}$ *étant une fraction irréductible ou non, on a*

$$B > Q_{n+1}.$$

En effet, on a *a fortiori*, d'après (6),

$$\left|I - \frac{A}{B}\right| < |I - I_n|;$$

$\frac{A}{B}$ approche plus de I que I_n et I_{n+1} et est compris entre I_n et I_{n+1}; par suite $\frac{A}{B} - I_n$ est de même signe que $I_{n+1} - I_n = (-1)^n Q_n^{-1} Q_{n+1}^{-1}$. Alors

$$0 < (-1)^n \left(\frac{A}{B} - I_n\right) = (-1)^n \frac{AQ_n - BP_n}{BQ_n} < Q_n^{-1} Q_{n+1}^{-1}.$$

$AQ_n - BP_n$ est entier $\neq 0$, puisque $\frac{A}{B} \neq I_n$ et il en résulte

$$Q_n Q_{n+1} < BQ_n, \qquad Q_{n+1} < B. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

8° *Si* $\left|I - \frac{A}{B}\right| \leqq (2B^2)^{-1}$, $\frac{A}{B}$ *est une réduite de* I.

On peut supposer $\frac{A}{B}$ irréductible, le cas où elle ne le serait pas se ramenant de suite au cas où elle le serait. On a

$$(8) \qquad I - \frac{A}{B} = \pm \frac{\theta}{2B^2}, \qquad 0 < \theta \leqq 1;$$

je développe $\frac{A}{B}$ en fraction continue [1]

$$\frac{A}{B} = b_0 + 1 : b_1 + \ldots + 1 : b_k = \frac{p_k}{q_k}; \tag{9}$$

ici $b_k > 1$, sans quoi l'on pourrait remplacer $b_{k-1} + 1 : b_k$ par $b_{k-1} + 1$: donc aussi

$$\frac{A}{B} = b_0 + 1 : b_1 + \ldots + 1 : (b_k - 1) + 1 : 1,$$

c'est-à-dire, en posant

$$b_k - 1 = b'_k, \qquad 1 = b'_{k+1},$$

$$\frac{A}{B} = b_0 + 1 : b_1 + \ldots + 1 : b'_k + 1 : b'_{k+1} : \tag{10}$$

cette dernière formule est analogue à (9), mais les nombres des quotients incomplets de (9) et (10) sont de parité différente : je pourrai

---

[1] Soit I un nombre positif quelconque > 0. Pour le développer en fraction continue, on prend le plus grand entier a_0 contenu dans I et l'on pose

$$I = a_0 + 1 : x_1,$$

d'où

$$x_1 > 1 :$$

on opère sur $x_1 > 1$ comme on l'a fait sur I

$$x_1 = a_1 + 1 : x_2, \qquad I = a_0 + 1 : a_1 + 1 : x_2,$$

d'où

$$a_1 \geqq 1, \qquad x_2 > 1$$

et ainsi de suite. De là le nom de *quotients complets* donné à $x_1, x_2, \ldots$; de *quotients incomplets* donné à $a_1, a_2, \ldots$. Cette opération se termine quand I est rationnel; car soit $I = \frac{M}{M_1}$, M, M_1 premiers entre eux : on a

$$M = M_1 a_0 + M_2, \qquad x_1 = \frac{M_1}{M_2}, \qquad M_1 = M_2 a_1 + M_3, \qquad x_2 = \frac{M_2}{M_3}, \qquad \ldots,$$
$$M_{n-1} = M_n a_{n-1} + 1, \qquad x_n = M_n = a_n.$$

La suite des opérations est alors la même que dans la recherche du plus grand commun diviseur de M et M_1. Réciproquement, une fraction continue limitée est évidemment égale à un nombre rationnel.

donc toujours mettre $\frac{A}{B}$ sous la forme (9), en supposant k à volonté pair ou impair, $b_k = 1$ ou > 1.

Ceci posé, je détermine le nombre y_{k+1} par l'égalité

$$(11) \qquad I = \frac{p_k y_{k+1} + p_{k-1}}{q_k y_{k+1} + q_{k-1}},$$

$\frac{p_i}{q_i}$ étant la $i^{\text{ième}}$ réduite de $\frac{A}{B}$; on a

$$I - \frac{A}{B} = \frac{p_k y_{k+1} + p_{k-1}}{q_k y_{k+1} + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1}}{q_k (q_k y_{k+1} + q_{k-1})}.$$

D'après (4) et (8),

$$I - \frac{A}{B} = \frac{(-1)^k}{q_k (q_k y_{k+1} + q_{k-1})} = \pm \frac{\theta}{2B^2}.$$

Je choisis la parité de k de façon que $(-1)^k$ et $\pm\theta$ soient de même signe; il en résulte

$$2q_k = \theta(q_k y_{k+1} + q_{k-1}),$$

$$y_{k+1} = \frac{2q_k - \theta q_{k-1}}{\theta q_k} > \frac{2}{\theta} - 1 \geqq 1.$$

Par suite, d'après (9) et (11),

$$I = b_0 + 1 : b_1 + \ldots + 1 : b_k + 1 : y_{k+1},$$

où y_{k+1} est > 1; si l'on développe y_{k+1} en fraction continue et que l'on substitue dans la formule ci-dessus, on obtient le développement en fraction continue de I, dont $\frac{A}{B}$ est, dès lors, une réduite.

9° *Sur la différence* $\left|I - \frac{A}{B}\right|$, $\frac{A}{B}$ *étant une fraction irréductible.*

Si $\frac{A}{B}$ *n'est pas réduite de* I, B *étant compris entre* Q_n *et* Q_{n+1},

$$(12) \qquad \left|I - \frac{A}{B}\right| > (2B^2)^{-1} > (2Q_{n+1}^2)^{-1} > [2Q_n^2(a_{n+1} + 1)]^{-1}.$$

Si $\frac{A}{B}$ *est une réduite*, $I_n = \frac{P_n}{Q_n}$,

(13) $[2B^2(a_{n+1}+1)]^{-1} < (2Q_nQ_{n+1})^{-1} < \left|I - \frac{A}{B}\right| < (Q_nQ_{n+1})^{-1} < (B^2a_{n+1})^{-1}$.

En effet, si l'on a

$$\left|I - \frac{A}{B}\right| \leqq (2B^2)^{-1},$$

$\frac{A}{B}$ est une des réduites de I, $I_n = \frac{P_n}{Q_n}$, et $B = Q_n$, $A = P_n$; d'après (7),

$$(2Q_nQ_{n+1})^{-1} < \left|I - \frac{A}{B}\right| < (Q_nQ_{n+1})^{-1};$$

d'après (3),

$$Q_{n+1} = Q_na_{n+1} + Q_{n-1}, \qquad Q_na_{n+1} < Q_{n+1} < Q_n(a_{n+1}+1),$$

d'où

(13) $$[2(a_{n+1}+1)Q_n^2]^{-1} < \left|I - \frac{A}{B}\right| < (Q_n^2a_{n+1})^{-1}.$$

Soit maintenant

$$\left|I - \frac{A}{B}\right| > (2B^2)^{-1}.$$

B est compris entre deux dénominateurs Q_n, Q_{n+1} des réduites, et

$$Q_n \leqq B < Q_{n+1};$$

(12) a lieu.

10° *Classification provisoire des fractions continues arithmétiques.*

Je vais indiquer ci-dessous une classification des fractions continues arithmétiques $I = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_n + \ldots$, basée sur la rapidité de croissance des modules des quotients incomplets a_n, les a_n étant supposés quelconques, entiers, réels [1].

---

[1] Une classification identique semble provisoirement acceptable quand

$$a_n = f + g\sqrt{-1}$$

est entier imaginaire (f et g entiers quelconques).

Soit

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots$$

la base des logarithmes népériens. Je pose

(14)

$$e_0(x) = x, \quad e_1(x) = e^x, \quad e_2(x) = e^{e_1(x)} = e^{e^x}, \quad \ldots, \quad e_{k+1}(x) = e^{e_k(x)}, \quad \ldots,$$

quand k entier $\geqq 0$;

$$\log_0 x = x, \quad \log_1 x = \log x, \quad \log_2 x = \log(\log_1 x), \quad \ldots, \quad \log_{k_1+1} = \log(\log_{k_1} x), \quad \ldots,$$

quand k_1 entier $\geqq 0$, les logarithmes étant népériens, puis

$$e_m(x) = \log_{-m} x,$$

m entier positif ou négatif, ce qui donne

$$e_{m+1}(x) = \log_{-m-1}(x) = e^{e_m(x)} = \log_{-1}(\log_{-m} x),$$
$$e_{m-1}(x) = \log_{1-m} x = \log[e_m(x)] = e_{-1}[e_m(x)],$$

et, en général,

$$e_{m+m_1}(x) = \log_{-m-m_1} x,$$

m, m_1 étant entiers, positifs, nuls ou négatifs.

Je considère la suite $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Si l'on a, pour une infinité de valeurs n_1 de n,

(15) $\quad |a_{n_1}| = e_k(n_1^{\rho+\varepsilon_{n_1}})$ pour $k \geqq 0$, $\quad |a_{n_1}| = e_k(n_1)^{\rho+\varepsilon_{n_1}}$ pour $k \leqq 0$,

ε_{n_1} étant positif ou négatif, mais tendant vers o quand n_1 croît indéfiniment; si, de plus, les autres quantités a_n, à partir d'une certaine valeur ν de n, sont telles que

(16) $\quad |a_n| < e_k(n^{\rho-\varepsilon})$ pour $k \geqq 0$, $\quad |a_n| < e_k(n)^{\rho-\varepsilon}$ pour $k \leqq 0$,

le nombre positif ε, fixé à l'avance, étant aussi petit qu'on veut, je dirai, ρ étant ici un nombre positif qui n'est ni nul ni infini et k un entier positif, nul ou négatif, que *la suite* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, *ou le nombre* I, *est d'ordre* (k, ρ) (1). Les quotients a_{n_1} satisfaisant à (15)

(1) On pourrait aussi adopter une classification plus simple en prenant seulement, quel que soit k, soit les deux premières inégalités (15) et (16), soit les dernières;

seront dits les *quotients incomplets principaux*. Les réduites correspondantes I_{n_1-1} de I seront *les réduites principales*. On a évidemment à la fois, quand ν est assez grand et $n_1 \geqq \nu$, d'après (15) et (16),

$$(17)\quad \begin{cases} e_k(n_1^{\rho-\varepsilon}) < |a_{n_1}| < e_k(n_1^{\rho+\varepsilon}), & |a_n| < e_k(n^{\rho-\varepsilon}) < e_k(n^{\rho+\varepsilon}), \quad k \geqq 0, \\ e_k(n_1)^{\rho-\varepsilon} < |a_{n_1}| < e_k(n_1)^{\rho+\varepsilon}, & |a_n| < e_k(n)^{\rho-\varepsilon} < e_k(n)^{\rho+\varepsilon}, \quad k \leqq 0. \end{cases}$$

On dira que (k_1, ρ_1) est $<(k, \rho)$ si l'on a

1°
$$k_1 < k,$$

ou

2°
$$\rho_1 < \rho, \qquad k = k_1.$$

Cette classification laisse de côté trois cas extrêmes : 1° celui où, quel que soit i, dès que i est assez grand, on a

$$|a_i| < e_k(i)^\rho,$$

si petits que soient k (négatif) et ρ; les fractions I correspondantes seront dites *d'ordre* $(-\infty, \rho)$, ou, simplement, $-\infty$: c'est le cas quand tous les coefficients incomplets de I ont leurs modules limités; 2° celui où, dès que i est assez grand, on a, pour une infinité de valeurs i_1 de i,

$$|a_{i_1}| > e_k(i_1^{\rho-\varepsilon}),$$

si grands que soient k et ρ; les fractions I correspondantes seront dites *d'ordre* $(+\infty, \rho)$, ou, simplement, $+\infty$; 3° celui où $\rho = 0$ ou ∞ : une fraction I d'ordre $(k, 0)$, par définition, d'abord est telle que ε étant fixé aussi petit qu'on veut, mais positif, à partir d'une certaine valeur de n,

$$|a_n| < e_k(n^\varepsilon), \qquad \text{ou} \qquad |a_n| < e_k(n)^\varepsilon \qquad (k \geqq \text{ou} \leqq 0),$$

ensuite est telle que, pour une infinité de valeurs n_1 de n,

$$|a_{n_1}| > e_{k-1}(n_1^{\rho-\varepsilon}), \qquad \text{ou} \qquad |a_{n_1}| > e_{k-1}(n_1)^{\rho-\varepsilon} \qquad (k \geqq \text{ou} \leqq 0),$$

si grand que soit ρ.

---

celle que je choisis ici, à titre provisoire, conduit plus loin à un énoncé plus simple et plus précis (Chap. III, p. 53).

Toutes ces classifications ont leurs analogues dans la théorie des fonctions entières (note I à la fin du Volume).

Une fraction d'ordre $(k-1, \infty)$ satisfait aux mêmes conditions, par définition, et l'on peut écrire [1]

$$(k, 0) = (k-1, \infty).$$

Voici des exemples :

Quand $|a_n| \leqq a$, a limité, on a vu que I est d'ordre $-\infty$.

Quand $a_0 = 1$, $a_n = 4n - 2$ pour $n > 0$,

$$a_n = n^{1+\varepsilon_n} = e_0(n^{1+\varepsilon_n}),$$

$$(1+\varepsilon_n)\log n = \log n + \log\left(4 - \frac{2}{n}\right),$$

$$\varepsilon_n = \frac{\log\left(4 - \frac{2}{n}\right)}{\log n}.$$

L'ordre est ici $(0, 1)$; on sait d'autre part que

$$I' = 1 + 2 : 1 + 1 : 6 + 1 : 10 + \ldots + 1 : 4n - 2 + 1 : \ldots = e;$$

donc, par extension :

Le développement en fraction continue de e est d'ordre $(0, 1)$ [2].

---

(1) Cette classification, qui correspond à une classification des fonctions entières (note I à la fin du Volume), ne doit être regardée que comme provisoire. Elle pourra être remaniée quand on aura classé les fractions continues algébriques qui définissent des quotients de fonctions entières, c'est-à-dire de séries à rayon de convergence infini. Des travaux de M. A. Auric sont en cours à ce sujet (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 7 août 1905, p. 344). Il est à espérer qu'une certaine correspondance pourra être établie entre l'ordre dans les deux classifications, après des remaniements convenables, s'il y a lieu.

Peut-être aussi des travaux ultérieurs conduiront-ils à modifier ou à préciser toutes ces classifications.

(2) Je demande qu'on admette ici que e possède un développement en fraction continue de cette forme; voir plus loin page 123.

On a d'ailleurs

$$e = 2 + 1 : 1 + 1 : 2 + \ldots + 1 : 1 + 1 : 2n + 1 : 1 + \ldots.$$

Quand je dis que le développement précité de e en fraction continue est d'ordre $(0, 1)$, j'étends légèrement les définitions précédentes : ce développement rentre dans la catégorie des fractions continues

$$J = \alpha_0 + \beta_0 : \alpha_1 + \ldots + \beta_{l-1} : \alpha_l + 1 : a_{l+1} + 1 : a_{l+2} + \ldots + 1 : a_n + \ldots,$$

où les α_i, β_i peuvent être absolument quelconques, mais $\neq 0$; on peut évidemment

Je prends encore pour a_n l'entier immédiatement supérieur à $e_n(n)$. D'après (15), k et ρ ne peuvent être finis; si $\rho = 0$, k ne peut non plus être fini : I est alors d'ordre $+\infty$.

---

adopter pour elles *les mêmes définitions de l'ordre.*

Ceci pose une question intéressante :

L'ordre de

$$J' = \gamma_0 + \delta_0 : \gamma_1 + \ldots + \delta_{m-1} : \alpha_0 + \beta_0 : \alpha_1 + \ldots + 1 : a_n + \ldots,$$

c'est-à-dire d'une fraction continue qui possède à partir d'un certain rang les mêmes numérateurs et dénominateurs α_i, β_i, a_n que J, est-il le même?

Je suppose que J soit d'ordre (k, ρ); il est bien évident que J' n'est pas d'ordre $> (k, \rho)$: $|a_n|$ satisfait à (15) et (16) pour J. Dans J', a_n est le $(n+m)^{\text{ième}}$ quotient incomplet, et, si a_n est un quotient principal de J,

$$|a_n| > e_k(n^{\rho-\varepsilon}), \qquad \text{ou} \qquad |a_n| > e_k(n)^{\rho-\varepsilon} \qquad (k \geqq 0 \text{ ou } \leqq 0),$$

d'après (17); soit

$$\sigma = \rho - \varepsilon, \qquad n^\sigma = (n+m)^{\sigma_n}$$

avec

$$\sigma_n = \sigma - \eta_n < \sigma,$$

$$\left(\frac{n}{n+m}\right)^\sigma = (n+m)^{-\eta_n}, \qquad (n+m)^{\eta_n} = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^\sigma, \qquad \eta_n = \sigma \frac{\log\left(1 + \frac{m}{n}\right)}{\log(n+m)},$$

et $\lim \eta_n = 0$ pour $n = \infty$. Donc, η étant aussi petit qu'on veut et > 0, et $k > 0$,

$$|a_n| > e_k[(n+m)^{\rho-\eta}]$$

pour une infinité de valeurs de n : J' *est d'ordre* (k, ρ).

De même, si $k < 0$, $k = -k_1$, $e_k(n) = \log_{k_1} n$, on a

$$n + m < 2n, \qquad \log(n+m) < \log 2n < 2\log n,$$

$$\log_2(n+m) < \log(2\log n) < 2\log_2 n, \quad \ldots, \quad \log_{k_1}(n+m) < 2\log_{k_1} n < (\log_{k_1} n)^{1+\varepsilon},$$

$$e_k(n)^{\rho-\varepsilon} > e_k(n+m)^{\frac{\rho-\varepsilon}{1+\varepsilon}} > e_k(n+m)^{\rho-\eta};$$

donc

$$|a_n| > e_k(n+m)^{\rho-\eta}.$$

J' *est encore d'ordre* (k, ρ).

Ces résultats restent dès lors également vrais si quelques-uns des α_i, β_i manquent dans le développement J'.

On verra d'ailleurs plus loin (Chap. III, p. 56) que les divers développements analogues à J d'une même irrationnelle réelle, où les α_i, β_i, a_n sont réels et les a_n entiers et > 0 sont de même ordre.

CHAPITRE II.

CONDITIONS SUFFISANTES POUR QU'UN NOMBRE SOIT TRANSCENDANT. NOMBRES DE LIOUVILLE.

On doit à Liouville [1] cette propriété fondamentale :

THÉORÈME. — *Soient* ξ *une quantité quelconque,*

$$I_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \qquad \ldots, \qquad I_n = \frac{P_n}{Q_n}, \qquad \ldots$$

des fractions rationnelles réelles ou imaginaires, dont une infinité ont des valeurs distinctes [2], *à dénominateurs réels, qui tendent vers la limite* ξ *quand n croît indéfiniment, et dont les dénominateurs croissent indéfiniment* [3] *au moins à partir d'un certain indice.*

ξ *ne peut être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers de degré* $\leqq \alpha$, *c'est-à-dire* ξ *ne peut être une irrationnelle algébrique de degré* $\leqq \alpha$ *que si l'on a, dès que n est assez grand, pour toute valeur de n,*

$$|\xi - I_n| > (MQ_n^\alpha)^{-1},$$

M *étant une quantité indépendante de n.*

---

(1) *Journ. de Math.*, 1851, p. 133.

(2) Ces fractions peuvent être irréductibles ou non ; si, à partir d'une certaine valeur de n, on avait $I_n =$ const., la limite serait évidemment une quantité rationnelle. J'appelle ici *fraction rationnelle* une fraction $\dfrac{f + g\sqrt{-1}}{f' + g'\sqrt{-1}}$, où f, g, f', g' sont entiers, positifs ou négatifs : la multiplication des deux membres par $f' - g'\sqrt{-1}$ donne un dénominateur réel.

(3) Ceci n'est qu'une conséquence de l'hypothèse que la suite contient une infinité de fractions ayant des valeurs distinctes.

On peut toujours, dans les raisonnements, considérer si l'on veut $\xi + 1 = \xi_1$ au lieu de ξ; par suite, on peut y supposer $\xi \neq 0$.

Si cette inégalité est en défaut, quel que soit α, pour une infinité de valeurs de n, ξ est transcendant : je dirai alors que c'est *un nombre transcendant de Liouville;* la suite des I_n sera dite, dans ce cas, une *suite de Liouville*.

L'inégalité ci-dessus s'établit simplement : je vais la démontrer en l'étendant au cas où l'on considère des fractions rationnelles formées avec un nombre algébrique, réel ou imaginaire (*voir* l'énoncé, p. 19).

Je rappellerai d'abord qu'un nombre algébrique x_1 est, par définition, une racine d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers réels

$$\varphi(x_1) = 0;$$

soient d le degré de cette équation, $x_1, x_2, \ldots, x_d$ les d racines : elles sont distinctes : on dit qu'elles sont *conjuguées*.

Quand le coefficient du terme de degré le plus élevé dans $\varphi(x)$, après suppression des facteurs communs à tous les coefficients, est l'unité, on dit que x_1 est *un nombre entier algébrique*. Si ([1])

$$(1_2) \qquad \varphi(x) = A_0 x^d + A_1 x^{d-1} + \ldots + A_d = 0,$$

où A_0 est positif, et si l'on pose

$$x = \frac{y}{A_0},$$

on voit de suite que y est un entier algébrique.

Je considère maintenant une fraction rationnelle

$$I_n(x_1) = \frac{P_n(x_1)}{Q_n(x_1)},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des polynomes en x_1 à coefficients entiers réels; on pourrait supposer, si l'on voulait, que $P_n(x_1)$ et $Q_n(x_1)$ sont de degré $\geqq d-1$, car, si x_1^{d-k}, avec $k \geqq 0$, figure dans un quelconque des deux polynomes, on peut remplacer x_1^{d-k} par un polynome de degré inférieur, en tenant compte de $\varphi(x_1) = 0$, et abaisser progressivement les degrés de $P_n(x_1)$ et $Q_n(x_1)$, jusqu'à ce

---

[1] Je désigne par la notation (m_j) la $m^{\text{ième}}$ formule numérotée du $j^{\text{ième}}$ Chapitre. Toutefois, pour le premier Chapitre, j'ai supprimé les indices.

que ces degrés ne dépassent pas $d-1$: je ne supposerai pas cette réduction de degré faite nécessairement.

Si $Q_n(\alpha_1)$ contient effectivement α_1, je poserai

$$I_n(\alpha_1) = \frac{P_n(\alpha_1)\, Q_n(\alpha_2) \ldots Q_n(\alpha_d)}{Q_n(\alpha_1)\, Q_n(\alpha_2) \ldots Q_n(\alpha_d)}.$$

Le dénominateur du second membre est une fonction symétrique des racines de $\varphi(\alpha_1) = 0$, par suite un nombre rationnel ordinaire réel. D'autre part, prenant l'équation dont $Q_n(\alpha_1)$, $Q_n(\alpha_2)$, ..., $Q_n(\alpha_d)$ sont racines, ses coefficients sont rationnels; en la divisant par $Q - Q_n(\alpha_1)$, on obtient une fonction de Q dont les coefficients sont des polynomes en α_1, à coefficients rationnels réels; l'un de ces coefficients est justement $Q_n(\alpha_2) \ldots Q_n(\alpha_d)$. Finalement la fraction peut toujours se mettre sous la forme

$$i_n(\alpha_1) = \frac{p_n(\alpha_1)}{q_n},$$

où $p_n(\alpha_1)$ est un polynome en α_1, à coefficients entiers réels, de degré $\leqq d-1$ si l'on veut, et q_n un entier ordinaire réel.

Je considère alors un nombre algébrique $\beta \neq 0$ racine d'une équation irréductible donnée à coefficients entiers réels de degré δ

$$f(\beta) = 0,$$

et une fraction

$$\mathfrak{z} = \frac{p(\alpha_1)}{q} = \frac{p_{\alpha_1}}{q},$$

analogue à $i_n(\alpha_1)$ *et approchée de* β (q étant entier), mais $\neq \beta$, c'est-à-dire que $p(\alpha_1) \neq 0$, puisque $\beta \neq 0$, et $|\beta - \mathfrak{z}|$ est assez petit. Les racines de $f(x)$ sont distinctes, et $f'(\beta) \neq 0$; la racine γ de $f'(x)$ pour laquelle $|\gamma - \beta|$ est minimum diffère de β. Si

$$|f'(\beta)| = \frac{M}{4},$$

pour toutes les valeurs de h de module inférieur au nombre positif η assez petit,

$$\frac{M}{8} \leqq |f'(\beta - h)| \leqq \frac{M}{2},$$

puisque $f(x)$ et $f'(x)$ sont des fonctions continues.

Je suppose alors

$$|\beta - \vartheta| < \eta;$$

on pourra écrire

$$\beta = \vartheta + h, \qquad 0 = f(\beta) = f(\vartheta) + h\mathrm{A}.$$

D'ailleurs, si

$$f(x) = a_0 x^\delta + a_1 x^{\delta-1} + \ldots + a_\delta,$$

$$(2_2) \qquad f(\vartheta) = q^{-\delta}(a_0 p_{\alpha_1}^{\delta} + a_1 q p_{\alpha_1}^{\delta-1} + \ldots + a_\delta q^\delta),$$

qui n'est pas nul, car ϑ n'est pas racine de $f(x)$.

Quand α_1 est un nombre rationnel ordinaire, a, ou un nombre $a + bi$, où l'on peut supposer dans les deux cas a et b entiers, le numérateur du second membre est de la forme $\mathrm{N} + \mathrm{N}_1 i$, où N et N_1 sont entiers, l'un étant $\neq 0$, et l'on a

$$(3_2) \qquad |f(\vartheta)| \geqq q^{-\delta}.$$

Si η est suffisamment petit, A est de la forme

$$\mathrm{A} = f'(\beta - h) + \frac{h}{2!} f''(\beta - h) + \ldots = (1 + \varepsilon) f'(\beta - h),$$

où $|\varepsilon|$ est aussi petit qu'on veut dès que $|h|$ est assez petit. Donc

$$q^{-\delta} \leqq |f(\vartheta)| = |h\mathrm{A}| \leqq \mathrm{M}|h|,$$

$$(4_2) \qquad |h| = |\beta - \vartheta| \geqq (\mathrm{M} q^\delta)^{-1}.$$

Par conséquent, étant donnée une suite de fractions rationnelles réelles ou imaginaires $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_n, \ldots$ à dénominateurs réels, qui ont pour limite un nombre ξ, si, parmi ces fractions, il y en a une infinité qui ont des valeurs distinctes, ce nombre ne peut être racine d'une équation algébrique irréductible de degré δ, ou, *a fortiori*, de degré $\leqq \delta$, que si l'on a, à partir d'une certaine valeur de n,

$$(5_2) \qquad |\xi - \mathrm{I}_n| \geqq (\mathrm{M}\mathrm{Q}_n)^{-\delta},$$

où M ne dépend que de l'équation considérée : *c'est le théorème de Liouville*.

Mais, quand α_1 est un nombre algébrique, on ne peut plus écrire que le numérateur P_{α_1} du second membre de (2_2) a son module [1] $\geqq 1$.

Je remarque alors, P_{α_1} étant sous la forme d'un polynome en α_1 de degré k' et posant $\gamma_1 = A_0\alpha_1, \ldots, \gamma_d = A_0\alpha_d$, que P_{α_j} est de la forme $A_0^{-k'}P'_{\gamma_j}$, où P'_{γ_j} est un polynome à coefficients entiers, de degré k' en γ_j. D'ailleurs,

$$P_{\alpha_1}P_{\alpha_2}\ldots P_{\alpha_d} = A_0^{-dk'}P'_{\gamma_1}P'_{\gamma_2}\ldots P'_{\gamma_d} \neq 0,$$

puisque $\varphi(x)$ est irréductible, et qu'aucune de ses racines ne peut annuler le polynome $P(x)$ [2]. Or, $P'_{\gamma_1}, \ldots, P'_{\gamma_d}$ est une fonction symétrique des racines d'un polynome à coefficients entiers

$$A_0^{d-1}\varphi\left(\frac{y}{A_0}\right) = y^d + A_1 y^{d-1} + A_2 A_0 y^{d-2} + \ldots + A_d A_0^{d-1} = 0,$$

où le terme de degré le plus élevé a pour coefficient l'unité : c'est donc un entier, et sa valeur absolue est $\geqq 1$. Il en résulte

$$|P_{\alpha_1}| \geqq A_0^{-dk'}|P_{\alpha_2}\ldots P_{\alpha_d}|^{-1},$$

et, d'après (2_2),

$$(6_2) \qquad |f(\beta)| \geqq q^{-\delta}A_0^{-dk'}|P_{\alpha_2}\ldots P_{\alpha_d}|^{-1}.$$

Quand on aura substitué dans le second membre à $P_{\alpha_2}, \ldots, P_{\alpha_d}$ des limites supérieures déduites de la limite supérieure du module des racines $\alpha_2, \ldots, \alpha_d$ de $\varphi(x)$, on aura une formule qui pourra remplacer (3_2), et conduira de la même manière à une inégalité analogue à (4_2). Je vais donc m'occuper de cette dernière question.

Or, puisque $A_0 > 0$ dans (1_2), on a

$$0 = \varphi(\alpha_2) = A_0\alpha_2^d + A_1\alpha_2^{d-1} + \ldots + A_d,$$
$$A_0|\alpha_2^d| \leqq |A_1\alpha_2^{d-1}| + \ldots + |A_d|.$$

---

(1) On ne sait si ce numérateur n'est pas aussi petit qu'on veut :

$$(\sqrt{2}-1)^n = A'\sqrt{2} + B',$$

où A' et B' sont entiers ordinaires positifs ou négatifs et fonctions de n, est, en effet, aussi petit qu'on veut quand n est assez grand.

(2) Sans quoi $\varphi(x)$ aurait un diviseur commun avec $P(x)$; $\varphi(x)$, étant irréductible, diviserait $P(x)$, comme on sait ou comme on le voit facilement, et l'on aurait $P_{\alpha_1} = 0$, contrairement à l'hypothèse $\beta \neq 0$, η suffisamment petit.

Soit A' le plus grand des modules des coefficients $A_1, \ldots, A_d$, ρ le module de α_2, supposé > 1 ; on a

$$A_0\rho^d \leqq A'(\rho^{d-1} + \rho^{d-2} + \ldots + 1) \leqq A'\frac{\rho^d - 1}{\rho - 1},$$

$$\left(A_0 - \frac{A'}{\rho - 1}\right)\rho^d + \frac{A'}{\rho - 1} \leqq 0.$$

Ceci exige

$$(7_2) \qquad A_0 < \frac{A'}{\rho - 1}, \qquad \rho < 1 + \frac{A'}{A_0},$$

ce qui a encore lieu quand $\rho \leqq 1$. On en conclut que le module des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ de $\varphi(x)$ est $< 1 + \frac{A'}{A_0}$.

D'autre part, si a' est une limite supérieure du module des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_\delta$ de $f(x)$,

$$|P_{\alpha_j}| \leqq a'(|p_{\alpha_j}|^\delta + q|p_{\alpha_j}|^{\delta-1} + \ldots + q^\delta).$$

Ici j'introduirai le degré k de p_{α_i}, k étant ou non $\leqq d - 1$, et une limite supérieure p' de la valeur absolue de ses coefficients, en sorte que

$$k' = k\delta, \qquad |p_{\alpha_j}| \leqq p'(|\alpha_j|^k + \ldots + 1).$$

Si ρ' est une limite supérieure de $|\alpha_j|$, l'on peut prendre

$$\rho' \geqq 2 + \frac{A'}{A_0} > 2,$$

d'après (7_2); on a

$$|p_{\alpha_j}| \leqq p'(\rho'^k + \ldots + 1) \leqq p'\frac{\rho'^{k+1} - 1}{\rho' - 1} < p'\rho'^{k+1}.$$

J'assujettirai de plus la quantité ρ' à la condition

$$(8_2) \qquad p'\rho'^{k+1} = p'\left(2 + \frac{A''}{A_0}\right)^{k+1} \geqq 2q, \qquad \text{où} \qquad A'' \geqq A';$$

alors

$$|P_{\alpha_j}| \leqq a'q^\delta\left[\left(\frac{p'\rho'^{k+1}}{q}\right)^\delta + \ldots + 1\right]$$

$$\leqq a'q^\delta \frac{\left(\frac{p'\rho'^{k+1}}{q}\right)^{\delta+1} - 1}{\frac{p'\rho'^{k+1}}{q} - 1} < a'q^\delta\left(\frac{p'\rho'^{k+1}}{q}\right)^{\delta+1},$$

et, d'après (6_2),

$$(9_2) \qquad |f(\mathfrak{z})| > a'^{-(d-1)} A_0^{-dk'} q^{-d\delta} \left(\frac{p' \rho'^{k+1}}{q} \right)^{-(\delta+1)(d-1)} = E^{-1}.$$

Il ne reste qu'à raisonner comme on l'a fait sur (3_2); on a

$$E^{-1} < |f(\mathfrak{z})| \leqq M |h|,$$
$$|h| = |\beta - \mathfrak{z}| > (ME)^{-1},$$

où M ne dépend que des a_j et est limité en fonction de a'. On remarquera d'ailleurs, d'après (8_2), que E croît avec δ, E^{-1} décroît quand δ croît. De plus, a', A_0 ne dépendent pas des coefficients de p_{α_1}, ni de q.

J'en conclus cette extension du théorème de Liouville, *également fondamentale,* et qui le comprend :

Théorème I_2. — *Soit ξ une quantité quelconque,*

$$(10_2) \qquad I_1 = \frac{P_1(\alpha_1)}{Q_1}, \qquad \ldots, \qquad I_n = \frac{P_n(\alpha_1)}{Q_n}, \qquad \ldots,$$

des fractions réelles ou imaginaires, à dénominateur entier réel ordinaire, qui tendent vers la limite ξ quand n croît indéfiniment, et dont une infinité sont distinctes; on suppose que le numérateur $P_n(\alpha_1)$ est un polynome à coefficients entiers ordinaires réels de degré k_n formé avec une racine α_1 d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers

$$\varphi(\alpha_1) = A_0 \alpha_1^d + A_1 \alpha_1^{d-1} + \ldots + A_d = 0 \qquad (A_0 > 0),$$

par suite est algébrique. Soient encore p'_n une limite supérieure de la valeur absolue des coefficients de $P_n(\alpha_1)$, A''_n le plus petit nombre positif à la fois limite supérieure de la valeur absolue des coefficients $A_1, \ldots, A_d$, et assujetti de plus à la condition

$$(8_2 \, bis) \qquad p'_n \left(2 + \frac{A''_n}{A_0} \right)^{k_n+1} \geqq 2 Q_n.$$

ξ ne peut être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers réels tous au plus égaux à a' en valeur absolue et de degré $\delta \leqq \alpha$ que si l'on a, dès que n est assez grand, pour n quel-

conque,

$$(11_2)\quad |\xi - I_n| > \left\{ M a'^{d-1} A_0^{k_n d\alpha} Q_n^{d\alpha} \left[\frac{p'_n\left(2 + \frac{A''_n}{A_0}\right)^{k_n+1}}{Q_n} \right]^{(d-1)(\alpha+1)} \right\}^{-1},$$

où M *est limité supérieurement en fonction de* a'.

Remarque. — En tenant compte de (8_2), si $p'_n\left(2 + \frac{A'}{A_0}\right)^{k_n+1} < 2Q_n$, il faut prendre $A''_n > A'$. Dans ce cas on pourra, sans considérer la quantité A''_n, prendre $p'_n \rho'^{k_n+1} = 2Q_n$, c'est-à-dire qu'il faut en tout cas, d'après (6_2) et (9_2), l'une des conditions

$$(12_2)\quad \begin{cases} |\xi - I_n| > [M a'^{d-1} A_0^{k_n d\delta} Q_n^{d\delta} 2^{(d-1)(\delta+1)}]^{-1}, \\ |\xi - I_n| > \left[M a'^{d-1} A_0^{k_n d\delta} Q_n^{d\delta} \left(\frac{p'_n\left(2 + \frac{A'}{A_0}\right)^{k_n+1}}{Q_n} \right)^{(d-1)(\delta+1)} \right]^{-1}. \end{cases}$$

Ce système, où l'on remplace δ par α, équivaut à la condition (11_2) et pourra lui être substitué.

Quand $d = 1$, on peut supposer $A_0 = 1$, et l'on retrouve le théorème de Liouville.

On verra plus loin des applications de ce théorème; je crois utile, dès à présent, de montrer l'existence de suites analogues à (10_2) et dont la limite est un nombre transcendant.

Je considère le nombre dont l'expression est

$$\xi = m_1 b^{-\psi_1} + m_2 b^{-\psi_1\psi_2} + \ldots + m_n b^{-\psi_1\psi_2\cdots\psi_n} + \ldots,$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ sont des entiers positifs ou négatifs $< b$ en valeur absolue, et dont une infinité est $\neq 0$; b est un entier quelconque, et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ des entiers, avec $1 \leqq \psi_1 \leqq \psi_2 \leqq \ldots \leqq \psi_n \leqq \ldots$, ψ_n croissant indéfiniment avec n. Je prendrai pour $I_n = \frac{P_n}{Q_n}$ la somme des n premiers termes, et

$$Q_n = b^{\psi_1\psi_2\cdots\psi_n}.$$

Si $m_{n+1} = m_{n+2} = \ldots = m_{n+j-1} = 0$, $m_{n+j} \neq 0$, m_{n+j} étant le premier des coefficients de ξ qui ne s'annule pas après m_n (on peut avoir $j = 1$), I_{n+j} diffère évidemment de I_n. Alors $\xi - I_n \neq 0$, car

chaque terme de ξ est plus grand en valeur absolue que la somme des suivants dès que n est assez grand, et de plus

$$|\xi - I_n| \leqq b^{1-\psi_1\psi_2\ldots\psi_n\psi_{n+1}} = b\,Q_n^{-\psi_{n+1}};$$

l'inégalité (5_2), où δ a une valeur arbitraire donnée, cesse d'être satisfaite dès que n est assez grand, et, par suite, il est absurde d'admettre que ξ est racine d'une équation algébrique quelconque. Donc *ici ξ est transcendant.*

C'est là une application du théorème de Liouville.

Je vais maintenant indiquer une application du théorème fondamental I_2. Je prends la série

$$(13_2) \qquad \xi = m_1\alpha_1 b^{-\psi_1} + m_2\alpha_1^2 b^{-\psi_1\psi_2} + \ldots + m_n\alpha_1^n b^{-\psi_1\psi_2\ldots\psi_n} + \ldots,$$

où m_n, ψ_n, b sont définis comme tout à l'heure, et α_1, de module ρ, est une racine d'une équation algébrique donnée arbitraire à coefficients entiers. Le rapport d'un terme au précédent dans le deuxième membre, ces deux termes étant différents de zéro, a pour module

$$R_n = |m_{n+j}m_n^{-1}|\rho^j b^{-\psi_1\ldots\psi_n(\psi_{n+1}\ldots\psi_{n+j}-1)},$$

$(m_{n+1} = m_{n+2} = \ldots = m_{n+j-1} = 0)$, qui tend vers 0 quand n croît indéfiniment : le second membre de ξ converge quel que soit α_1. On va voir qu'il est absurde de supposer ξ racine d'une équation algébrique à coefficients entiers déterminée, d'ailleurs quelconque, de degré $\leqq \alpha$, où α est arbitraire.

Je prendrai ici pour $I_n(\alpha_1)$ la somme des n premiers termes de ξ

$$Q_n = b^{\psi_1\psi_2\ldots\psi_n}, \qquad P_n(\alpha_1) = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1^2 + \ldots + c_n\alpha_1^n, \qquad k_n = n,$$
$$p'_n = b^{\psi_1\psi_2\ldots\psi_n} = Q_n;$$

$(8_2\ bis)$ a lieu pour $A''_n = A'$ [formule (7_2)]; je poserai

$$2 + \frac{A''_n}{A_0} = 2 + \frac{A'}{A_0} = B,$$

et (11_2) deviendra

$$|\xi - I_n(\alpha_1)| > [M a'^{d-1} A_0^{nd\alpha} Q_n^{d\alpha} B^{(n+1)(d-1)(\alpha+1)}]^{-1} > [M a' B_1^{n+1} Q_n]^{-d(\alpha+1)},$$

où $B_1 = A_0 B$.

D'autre part, je choisis n assez grand pour que R_n soit plus petit que b^{-2}. Alors

$$\xi - I_n(\alpha_1) = S_n = m_{n+1}\alpha_1^{n-1} b^{-\psi_1 \cdots \psi_{n+1}} + \ldots \quad (^1),$$
$$|S_n| < b^{-\psi_1 \cdots \psi_{n+1}}(b-1)\rho^{n+1}(1 + b^{-2} + b^{-4} + \ldots) < b^{1-\psi_1 \cdots \psi_{n+1}}\rho^{n+1}.$$

Il faudra donc

$$[M a' B_1^{n-1} Q_n]^{d(\alpha+1)} > b^{\psi_1 \cdots \psi_{n+1} - 1}\rho^{-(n+1)},$$

ou

$$b(M a')^{d(\alpha+1)}[B_1^{d(\alpha+1)}\rho]^{n+1} > b^{\psi_1 \cdots \psi_n(\psi_{n+1} - d(\alpha+1))}.$$

Or α, d, M, a', b, B_1, ρ sont des quantités positives déterminées; en désignant par N une quantité positive déterminée telle que N^{n+1} soit supérieur au premier membre, il faudra, *a fortiori*,

$$(14_2) \qquad N^{n+1} > b^{\psi_1 \cdots \psi_n(\psi_{n+1} - d(\alpha+1))}.$$

On peut toujours prendre n assez grand pour que

$$b^{\psi_{n-1} - d(\alpha+1)} > N^2;$$

alors, l'inégalité (14_2) sera impossible dès que

$$(15_2) \qquad \frac{n+1}{2} < n \leqq \psi_1 \ldots \psi_n.$$

Si cette condition est remplie, (11_2) ne peut avoir lieu, et ceci quel que soit le nombre α_1, dès que n est assez grand; ξ est alors transcendant. Mais (15_2) a lieu dès que n est assez grand, car, pour $n \geqq \nu$, $\psi_n \geqq 2$, et $\psi_1 \ldots \psi_n \geqq 2^{n-\nu+1}$ qui est plus grand que n à partir d'une certaine valeur de n. Donc :

Corollaire I_2. — *Quel que soit le nombre algébrique α_1, le nombre ξ défini par (13_2) est transcendant.*

Il n'est pas inutile de déduire des formules (11_2) et (12_2) une inégalité moins précise, mais qui s'appliquera quel que soit le poly-

---

(1) $|S_n| = |m_{n+j}|\rho^{n+j}(1 + \varepsilon_{n+j})b^{-\psi_1\psi_2 \cdots \psi_{n+j}}$, où ε_{n+j} tend vers o quand n croît indéfiniment; les fractions $I_n(\alpha_1)$ sont toutes distinctes à partir d'une certaine valeur de n, car $|S_n|$ décroît constamment quand n croît.

nome $\varphi(\alpha_1)$, et qui permette d'affirmer que le nombre ξ est transcendant. Il suffira pour cela que l'inégalité

$$(16_2) \qquad |\xi - I_n(\alpha_1)| < [p'_n Q_n B_n^{k_n}]^{-\delta_n}$$

soit satisfaite pour une infinité de valeurs de n, B_n, δ_n étant des fonctions de n non décroissantes > 0, et dont la limite est $+\infty$ pour $n = \infty$.

Corollaire II_2. — *Tout étant posé comme dans l'énoncé du théorème* I_2, *si l'inégalité* (16_2) *a lieu pour une infinité de valeurs de* n, ξ *est transcendant.*

J'ajouterai qu'un théorème analogue au théorème I_2 a encore lieu quand on prend pour α_1 dans les $I_n(\alpha_1)$, non plus un nombre algébrique, mais un nombre transcendant qu·lconque déterminé. La difficulté dans l'application de cette dernière propriété commence quand on veut obtenir une formule analogue à (11_2).

En effet, on peut établir sommairement ce résultat comme il suit : d'après (2_2), $f(I_n)$ a son module limité inférieurement en fonction de k_n, p'_n, Q_n, $\alpha \geqq \delta$, a', et

$$|f(I_n)| \geqq F(k_n, p'_n, Q_n, \alpha, a').$$

Soit φ_n une fonction de n au plus égale à la plus petite des valeurs de $F(k_n, p'_n, Q_n, t, u)$ quand t, u prennent toutes les valeurs positives au plus égales à n. On a, *a fortiori*,

$$|f(I_n)| \geqq \varphi_n.$$

D'autre part

$$|f(I_n)| \leqq |hA| \leqq M|h|.$$

Soit encore χ_n une fonction de n plus grande que la plus grande des quantités M correspondant aux diverses équations irréductibles $f(x)$ pour lesquelles $|a_j| \leqq n$, $\delta \leqq n$: il faut

$$\varphi_n \leqq |f(I_n)| \leqq |h|\chi_n,$$
$$|h| = |\xi - I_n| \leqq \varphi_n \chi_n^{-1}.$$

Si $|\xi - I_n|$ décroît suffisamment vite quand n croît, cette condi-

tion ne sera plus satisfaite à partir d'une certaine valeur de n, et ξ sera transcendant.

Ainsi :

Soit

$$\xi = m_1 \xi_1 b^{-\psi_1} + m_2 \xi_1^2 b^{-\psi_1 \psi_2} + \ldots + m_n \xi_1^n b^{-\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n} + \ldots,$$

avec $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ *entiers* $< b$ *en valeur absolue,* b *entier;* ξ_1 *étant un nombre transcendant donné, quand* ψ_n *croît suffisamment vite avec* n, ξ *ne peut être algébrique* (¹).

(¹) Pour plus de détails, voir *Acta mathematica*, t. XXIX, 1905, p. 319-321

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES NOMBRES DE LIOUVILLE.

D'après ce qu'on a vu précédemment, un nombre de Liouville est un nombre transcendant ξ qui est limite d'une suite

$$(a_3) \qquad \frac{p_1}{q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n}, \quad \ldots$$

de fractions rationnelles à dénominateurs réels avec $q_{n+1} \geqq q_n$, $\lim q_n = \infty$, de façon que, pour une infinité de valeurs de n au moins égales à ν'_α,

$$(b_3) \qquad |\eta_n| = \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \varepsilon_n q_n^{-\alpha}, \qquad 0 < \varepsilon_n \leqq 1,$$

pour toute valeur du nombre positif α (ν'_α fonction de α) : les numérateurs sont de la forme $f + g\sqrt{-1}$, avec f, g entiers $\geqq 0$.

On peut encore dire que $|\eta_n|$ est de la forme $q_n^{-\lambda_n}$, où λ_n est positif et ne reste pas limité pour toute valeur de n quand n croît indéfiniment.

Je suppose alors que je supprime dans la suite (a_3) toutes les fractions $\frac{p_j}{q_j}$ pour lesquelles λ_j est inférieur à une des valeurs λ_{j-j_1}, avec $j_1 \geqq 1$: si $\frac{p_{j_1}}{q_{j_1}}$ est une fraction conservée, la première fraction $\frac{p_{j_1+j_2}}{q_{j_1+j_2}}$ conservée après $\frac{p_{j_1}}{q_{j_1}}$ sera la première telle que $\lambda_{j_1+j_2} \geqq \lambda_{j_1}$; λ_n ne restant pas limité pour toute valeur de n quand n croît indéfiniment, il y aura une infinité de fractions conservées. Soit

$$(\text{I}_3) \qquad \text{I}_1 = \frac{\text{P}_1}{\text{Q}_1}, \qquad \ldots, \qquad \text{I}_n = \frac{\text{P}_n}{\text{Q}_n}, \qquad \ldots$$

la suite obtenue; on a $\text{Q}_{n+1} \geqq \text{Q}_n$, $\lim \text{Q}_n = \infty$, et, quel que soit $n \geqq \nu_\alpha$,

$$(2_3) \qquad |\eta_n| = |\xi - \text{I}_n| = \varepsilon_n \text{Q}_n^{-\alpha}, \qquad 0 < \varepsilon_n \leqq 1.$$

L'hypothèse $\varepsilon_n > 0$ écarte le cas où ξ serait rationnel, car, si ξ est rationnel et $= \frac{\text{A}_1}{\text{B}_1}$, dès que n est assez grand, $\text{B}_1 \leqq \text{Q}_n$, et, B_1 étant

réel,

$$\left|\frac{A_1}{B_1} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{|A_1 Q_n - B_1 P_n|}{B_1 Q_n}$$

est nul ou au moins égal à Q_n^{-2}.

Dans ces conditions, lorsque ξ et $I_n = \frac{P_n}{Q_n}$ sont réels (ξ positif), on remarque que $|\eta_n| < (2Q_n^2)^{-1}$; d'après le n° 8 du Chapitre I (p. 5), I_n est précisément une réduite de ξ; par conséquent, en négligeant au besoin un certain nombre, fini, des premiers termes de (1_3) et ne conservant que les fractions I_n réelles, pourvu que la suite en contienne une infinité, on voit qu'on peut faire en sorte qu'il n'y reste plus que des réduites de ξ. Donc, en appelant réduites de ξ négatif les réduites de $-\xi$ affectées du signe $-$:

Une suite de Liouville qui contient une infinité de fractions réelles a pour limite un nombre transcendant réel ξ de Liouville et contient une infinité de réduites de ξ; on peut toujours supprimer une partie de ses termes de façon qu'elle ne contienne plus que des réduites (¹).

(¹) *Inversement, tout nombre transcendant réel de Liouville est la limite d'une suite de fractions réelles de Liouville.*

En effet, soit ξ un nombre transcendant réel de Liouville : je suppose que la suite ($1'_3$) correspondante renferme une infinité de fractions imaginaires satisfaisant à (b_3); car, s'il n'y en avait qu'un nombre fini, la propriété serait exacte d'après les définitions. Soient I_n une de ces fractions, I'_n la quantité conjuguée obtenue en y changeant $i = \sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; on a

$$|\xi - I_n| = \varepsilon_n Q_n^{-\alpha}, \qquad 0 < \varepsilon_n \leqq 1.$$

Or, si $P_n = a_n + b_n i$,

$$I_n = P_n Q_n^{-1} = (a_n + b_n i) Q_n^{-1},$$

$$\xi - I_n = \xi - (a_n + b_n i) Q_n^{-1} = \frac{\xi Q_n - a_n - b_n i}{Q_n},$$

$$|\xi - I_n|^2 = \frac{(\xi Q_n - a_n)^2 - b_n^2}{Q_n^2} = \varepsilon_n^2 Q_n^{-2\alpha}.$$

d'où, *a fortiori*,

$$\left|\xi - \frac{a_n}{Q_n}\right| = \zeta_n Q_n^{-\alpha}, \qquad 0 < \zeta_n < \varepsilon_n \leqq 1.$$

On voit donc que l'on peut substituer dans ($1'_3$) aux I_n imaginaires les fractions correspondantes $J_n = a_n Q_n^{-1}$ formées de la partie réelle des I_n sans changer les propriétés de la suite. Donc :

Quand ξ est réel, on peut toujours supposer les fractions de la suite ($1'_3$), a fortiori *de* (1_3), *réelles.*

La suite (1_3) trouvée ci-dessus est telle que, si $|\eta_n| = Q_n^{-\lambda_n}$, $\lambda_{n+1} \geqq \lambda_n$; il en résulte que, dès que $n \geqq \nu_\alpha$, (2_3) a lieu. Je considérerai plus généralement dans ce qui suit le nombre ξ de Liouville comme limite d'une suite

$$(1'_3) \qquad I_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \quad \ldots, \quad I_n = \frac{P_n}{Q_n}, \quad \ldots$$

avec $Q_{n+1} \geqq Q_n$, $\lim Q_n = \infty$, et satisfaisant à (2_3), sans que pour cela on ait forcément $\lambda_{n+1} \geqq \lambda_n$; si I_n est réel, ce sera encore une réduite de ξ, dès que n dépasse une certaine limite.

Soit maintenant une suite analogue à $(1'_3)$

$$(3_3) \qquad I'_1 = \frac{P'_1}{Q'_1}, \quad \ldots, \quad I'_n = \frac{P'_n}{Q'_n}, \quad \ldots,$$

ayant pour limite un nombre ξ' tel que

$$(4_3) \qquad \begin{cases} Q'_n = Q_n^{\sigma_n}, \\ |\eta'_n| = |\xi' - I'_n| = \varepsilon'_n Q'^{-\alpha}_n, \qquad 0 < \varepsilon'_n \leqq 1, \end{cases}$$

α pouvant être encore pris aussi grand qu'on veut dès que n dépasse une certaine limite fonction de α. De plus, la quantité *positive* σ_n, entière ou non, reste comprise entre des limites supérieures et inférieures > 0 et déterminées pour le nombre ξ', quand n varie. D'après $0 < \varepsilon'_n$, ξ' est encore un nombre transcendant de Liouville, et, si I'_n est réel, c'est une réduite de ξ'.

Au nombre transcendant ξ on peut ainsi faire correspondre un ensemble H de nombres transcendants ξ', qui comprend ξ : cet ensemble sera dit, par définition, *l'ensemble des nombres transcendants correspondant à* ξ; les fractions I_n et I'_n seront dites *correspondantes* [1].

---

[1] Je donne plus loin (p. 37 et suivantes) des exemples de pareils ensembles. On suppose ici que l'on ait toujours ε_n, $\varepsilon'_n \neq 0$. Si ε'_n était nul pour une valeur de n, ξ' serait rationnel; à partir d'une certaine valeur de n, on aurait $\varepsilon'_n = 0$; je ne comprends pas dans H un pareil nombre ξ'.

On verra plus loin (Chap. VII et IX) qu'il y a d'autres nombres transcendants que ceux de Liouville; ainsi e, qui est transcendant, n'est pas un nombre de Liouville.

Je me borne ici aux suites (1_3) ou (a_3) dans lesquelles les numérateurs sont des nombres entiers réels ou imaginaires, les dénominateurs des nombres entiers réels; je laisse de côté le cas où p_n, P_n seraient des polynomes formés avec un nombre algébrique. Toutefois, dans ce cas, on peut adopter une définition identique de nombres correspondants. On voit sans peine, à l'aide des mêmes procédés, que ces nombres se reproduisent par *addition*, *soustraction* et *multiplication*, ou donnent des nombres rationnels.

Soit ξ'' un nombre de l'ensemble H différent de ξ et ξ' et limite de la suite

$$(5_3) \qquad I''_1 = \frac{P''_1}{Q''_1}, \quad \ldots, \quad I''_n = \frac{P''_n}{Q''_n}, \quad \ldots,$$

analogue à (3_3);

$$(6_3) \qquad \begin{cases} Q''_n = Q_n^{\sigma'_n}, \\ |\eta''_n| = |\xi'' - I''_n| = \varepsilon''_n Q_n''^{-\alpha}, \qquad 0 < \varepsilon''_n \leqq 1. \end{cases}$$

Je considère l'ensemble H' des nombres transcendants correspondant à ξ'; d'après (4_3), $Q_n'^{\frac{1}{\sigma_n}} = Q_n$, et ξ appartient à H'; d'après (6_3), $Q''_n = Q_n^{\sigma'_n} = Q_n'^{\frac{\sigma'_n}{\sigma_n}}$, et ξ'' appartient à H'. L'ensemble H' contient chacun des nombres de l'ensemble H. En vertu du même raisonnement, l'ensemble H contient chacun des nombres de l'ensemble H' : H' et H coïncident.

L'ensemble H *correspondant à* ξ *est aussi l'ensemble qui correspond à un quelconque des nombres de* H, *nombres qui sont tous transcendants.*

Les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique effectuées sur les nombres de H.

Soit le nombre $\xi_1 = \frac{p}{q}\xi + \frac{p'}{q'}$, où p, q, p', q' sont des entiers (p, p' positifs, négatifs ou imaginaires); on a

$$\frac{p}{q} I_n + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' P_n - p'q Q_n}{qq' Q_n} = \frac{p_n}{q_n},$$

$$q_n = qq' Q_n = Q_n^{\tau_n}, \qquad \lim \tau_n = 1 \quad \text{pour} \quad n = \infty,$$

$$\zeta_n = \left| \frac{p}{q}\xi + \frac{p'}{q'} - \left(\frac{p}{q} I_n + \frac{p'}{q'} \right) \right| = \frac{|p|}{q} \varepsilon_n Q_n^{-\alpha},$$

$$(6_3\ bis) \qquad \frac{q}{|p|} Q_n^{\alpha} = \frac{q}{|p|} q_n^{\frac{\alpha}{\tau_n}} = q_n^{\alpha_1};$$

pour des valeurs suffisamment grandes de n, α pouvant être pris aussi grand qu'on veut, $\alpha_1 \alpha^{-1}$ peut être pris aussi voisin qu'on veut de 1.

On a donc simultanément, à partir d'une certaine valeur de n,

si $2\beta = \alpha$,

$$|\eta_n| = e_n Q_n^{-\beta}, \quad 0 < e_n \leqq 1; \quad \zeta_n = e'_n q_n^{-\beta}, \quad 0 < e'_n \leqq 1; \quad q_n = Q_n^{\tau_n};$$

donc le nombre ξ_1 appartient à H.

L'ensemble H *contient tous les nombres* ξ *qui s'expriment en fonction linéaire rationnelle de* ξ.

Je dirai dans ce cas que les nombres ξ et ξ_1 *ne sont pas des nombres transcendants réellement distincts* (sous-entendu : *dans l'ensemble* H).

Je vais m'occuper maintenant de l'effet des opérations fondamentales de l'Arithmétique sur les nombres de H, addition, soustraction, multiplication, division.

Addition. — Si l'addition de deux nombres transcendants donne un nombre rationnel,

$$\xi_1 + \xi = \frac{p'}{q'}, \qquad \xi_1 = -\xi + \frac{p'}{q'};$$

ξ_1 n'est pas réellement distinct de ξ.

Je prends les deux nombres transcendants ξ et ξ' :

$$\xi_2 = \xi + \xi' = \lim(\mathrm{I}_n + \mathrm{I}'_n) = \lim \frac{\mathrm{P}_n \mathrm{Q}'_n + \mathrm{P}'_n \mathrm{Q}_n}{\mathrm{Q}_n \mathrm{Q}'_n} \qquad \text{pour} \qquad n = \infty.$$

Soit

$$p_n = \mathrm{P}_n \mathrm{Q}'_n + \mathrm{P}'_n \mathrm{Q}_n, \qquad q_n = \mathrm{Q}_n \mathrm{Q}'_n;$$

d'après (2_3) et (4_3),

$$\left|\xi_2 - \frac{p_n}{q_n}\right| = |f_n \mathrm{Q}_n^{-\alpha} + f'_n \mathrm{Q}'^{-\alpha}_n| \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_n = |f_n|, \qquad \varepsilon'_n = |f'_n|;$$

$$(7_3) \qquad q_n = \mathrm{Q}_n \mathrm{Q}'_n = \mathrm{Q}_n^{1+\sigma_n},$$

$$\mathrm{Q}_n^{\alpha} = q_n^{\frac{\alpha}{1+\sigma_n}}, \qquad \mathrm{Q}'^{\alpha}_n = \mathrm{Q}_n^{\alpha\sigma_n} = q_n^{\frac{\alpha\sigma_n}{1+\sigma_n}}.$$

σ_n reste limité supérieurement et inférieurement; donc on peut, α_1 étant choisi arbitrairement et positif, prendre n et α assez grands

pour qu'on ait, à partir d'une certaine valeur de n,

$$Q_n^{\alpha} > 2q_n^{\alpha_1}, \qquad Q_n'^{\alpha} > 2q_n^{\alpha_1},$$

$$(8_3) \qquad \left|\xi_2 - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{\varepsilon_n + \varepsilon'_n}{2} q_n^{-\alpha_1}, \qquad \frac{\varepsilon_n + \varepsilon'_n}{2} \leq 1,$$

c'est-à-dire que, d'après (7_3) et (8_3), ξ_2 fait partie de H.

Ce raisonnement suppose toutefois :

1° $p_n \neq 0$; si $p_n = 0$ pour une infinité de valeurs de n, $\xi_2 = 0$ et $\xi = -\xi'$.

2° $\xi_2 - \frac{p_n}{q_n} \neq 0$; si cette quantité est nulle pour une valeur de n, $\xi + \xi'$ est une fraction rationnelle : c'est le cas signalé tout à l'heure.

Finalement :

La somme de deux nombres de H *est un nombre transcendant de* H *ou une fraction rationnelle : ce dernier cas ne peut avoir lieu que si les deux nombres ne sont pas réellement distincts.*

Soustraction. — Les deux nombres ξ' et $-\xi'_1$ font simultanément partie de H; $\xi' - \xi'_1 = \xi' + (-\xi'_1)$ est la somme de deux nombres de H. Donc :

La différence de deux nombres de H *est un nombre transcendant de* H *ou un nombre rationnel : ce dernier cas ne peut avoir lieu que si les nombres ne sont pas réellement distincts.*

Multiplication. — D'abord on a vu, $\frac{p}{q}$ étant rationnel, que $\xi_1 = \xi \frac{p}{q}$ appartient à H.

Je reprends maintenant les équations (2_3) et (4_3) :

$$\xi = I_n + \eta_n, \qquad \xi' = I'_n + \eta'_n,$$
$$\xi\xi' = I_n I'_n + \eta_n I'_n + \eta'_n I_n + \eta_n \eta'_n.$$

Soient

$$(9_3) \qquad p_n = P_n P'_n, \qquad q_n = Q_n Q'_n = Q_n^{1+\sigma_n};$$

I_n et I'_n diffèrent aussi peu qu'on veut de ξ, ξ' quand n est assez grand, et

$$\xi\xi' - \frac{p_n}{q_n} = f_n I'_n Q_n^{-\alpha} + f'_n I_n Q_n'^{-\alpha} + f_n f'_n Q_n^{-\alpha} Q_n'^{-\alpha}.$$

Or

$$Q_n^\alpha |I_n'^{-1}| = 3\,Q_n^{\alpha_1} = 3\,q_n^{\frac{\alpha_1}{1+\sigma_n}}, \qquad Q_n'^\alpha |I_n^{-1}| = Q_n^{\alpha\sigma_n} |I_n^{-1}| = 3\,Q_n^{\alpha_2\sigma_n} = 3\,q_n^{\frac{\alpha_2\sigma_n}{1+\sigma_n}},$$

$$Q_n^\alpha Q_n'^\alpha = Q_n^{\alpha(1+\sigma_n)} = 3\,Q_n^{\alpha_3(1+\sigma_n)} = 3\,q_n^{\alpha_3};$$

σ_n reste limité supérieurement et inférieurement; quand n et α sont assez grands, $\alpha_1\alpha^{-1}$, $\alpha_2\alpha^{-1}$, $\alpha_3\alpha^{-1}$ sont aussi voisins qu'on veut de 1.

Par conséquent, α_4 étant choisi arbitrairement et positif, on peut prendre n et α assez grands pour que, à partir d'une certaine valeur de n,

$$Q_n^\alpha |I_n'^{-1}| > 3\,q_n^{\alpha_4}, \qquad Q_n'^\alpha |I_n^{-1}| > 3\,q_n^{\alpha_4}, \qquad Q_n^\alpha Q_n'^\alpha > 3\,q_n^{\alpha_4},$$

d'où

$$(10_3) \qquad \left|\xi\xi' - \frac{p_n}{q_n}\right| = \varepsilon_n'' q_n^{-\alpha_4}, \qquad \varepsilon_n'' \leqq 1.$$

Les égalités (9_3) et (10_3) montrent que $\xi\xi'$ fait partie de H, sauf une restriction comme à propos de l'addition : p_n n'est pas nul; mais il peut se faire que $\xi\xi' - \frac{p_n}{q_n}$ le soit, c'est-à-dire que $\xi' = \frac{p}{q\xi}$. Finalement :

Le produit de deux nombres de H *est un nombre transcendant de* H *ou un nombre rationnel.*

Division. — On peut opérer à peu près comme pour la multiplication en considérant le produit $\xi^{-1}\xi'$. Mais il suffira de prouver que, ξ étant un nombre transcendant quelconque de H, ξ^{-1} appartient à H.

ξ^{-1} est la limite de la suite

$$(11_3) \qquad I_1^{-1}, \quad \ldots, \quad I_n^{-1}, \quad \ldots.$$

d'abord, pour n assez grand,

$$I_n = \xi(1+\varepsilon), \qquad I_n^{-1} = \xi^{-1}(1+\varepsilon'),$$

$\lim \varepsilon$, $\lim \varepsilon' = 0$, pour $n = \infty$.

$$(12_3) \qquad |P_n| = \beta_n Q_n = Q_n^{\tau_1},$$

β_n voisin de $|\xi|$, $\lim \tau_1 = 1$ pour $n = \infty$.

$$\xi^{-1} - I_n^{-1} = (I_n + \eta_n)^{-1} - I_n^{-1} = -\eta_n I_n^{-1}(I_n + \eta_n)^{-1} = -\eta_n \gamma_n,$$

où γ_n est voisin de ξ^{-2}.

$$|-\eta_n \gamma_n| = \varepsilon_n |\gamma_n| Q_n^{-\alpha} = \varepsilon_n Q_n^{-\alpha_1} = \varepsilon_n |P_n|^{-\frac{\alpha_1}{\tau_1}},$$

avec $\frac{\alpha_1 \alpha^{-1}}{\tau_1}$ aussi voisin qu'on veut de 1 quand n est assez grand. On pourra toujours, α_2 étant choisi arbitrairement et positif, prendre n et α assez grands pour que

$$|P_n|^{\alpha_2} < |P_n|^{\frac{\alpha_1}{\tau_1}},$$

et

$$(13_3) \qquad |\xi^{-1} - I_n^{-1}| = \varepsilon_n'' |P_n|^{-\alpha_2}, \qquad 0 < \varepsilon_n'' \leqq 1.$$

Quand I_n est réel, (12_3) et (13_3) montrent que ξ^{-1} appartient à H. Quand I_n, et par suite P_n, sont imaginaires, si ϖ_n est la quantité conjuguée de P_n,

$$\frac{Q_n}{P_n} = \frac{Q_n \varpi_n}{|P_n|^2} = J_n,$$

$$(13_3\ bis) \qquad |\xi^{-1} - J_n| = \varepsilon_n''(|P_n|^2)^{-\frac{\alpha_2}{2}},$$

et ξ^{-1} appartient aussi à H. ξ^{-1} est forcément transcendant si ξ l'est.

ξ étant un nombre transcendant de H, *il en est de même de ξ^{-1}, qui est transcendant.*

On peut résumer les résultats qui précèdent dans l'énoncé suivant :

Théorème I_3. — *Quand on soumet les nombres de l'ensemble* H *aux quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, addition, soustraction, multiplication, division, on n'obtient que des nombres de* H *qui sont transcendants, ou des nombres rationnels* (1).

(1) Voici une conséquence intéressante : soit β un nombre algébrique, ξ un nombre transcendant de H ; $\beta\xi$ ne peut être ni rationnel ni algébrique, sans quoi ξ serait algébrique ; $\beta\xi$ est donc transcendant. S'il appartenait à H, H donnerait par l'opération $\beta\xi . \xi^{-1}$ le nombre algébrique β, qui devrait alors être rationnel. Donc, *il y a des nombres transcendants qui ne sont pas contenus dans* H, *à savoir le produit de chaque nombre de* H *par un nombre algébrique quelconque non rationnel.*

On peut remarquer que, ξ étant donné, les nombres rationnels sont compris parmi les nombres ξ' définis par (3_3) et (4_3), quand on suppose que ε'_n puisse s'annuler dans (4_3). Soit en effet $N = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel : n étant suffisamment grand, si $I_n = \frac{P_n}{Q_n}$, on a

$$N = \frac{p}{q} = \frac{p Q_n}{q Q_n}, \qquad q Q_n = Q_n^{\tau_n},$$

où $\lim \tau_n = 1$ pour $n = \infty$; de plus,

$$N - \frac{p}{q} = 0.$$

Les conditions (4_3), avec $\varepsilon'_n = 0$, sont satisfaites pour $\frac{p}{q}$.

Soit alors H_1 l'ensemble formé des nombres de H et des nombres rationnels, dont l'ensemble est R, ce que j'indiquerai symboliquement par

$$H_1 = H + R.$$

D'après ce qui précède :

Corollaire. — *Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels des nombres de* H_1 *appartient à* H_1. *De même pour toute fonction rationnelle des nombres de* H_1 *dont les coefficients sont formés rationnellement avec des nombres de* H_1 (¹).

On peut encore exprimer cette propriété en disant, *par définition,* que *l'ensemble* H_1 *forme un groupe par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique.*

Extensions des idées précédentes. — Les théories précédentes sont susceptibles de diverses extensions.

Je n'ai assujetti la quantité α qu'à cette condition de pouvoir prendre une valeur fixe arbitrairement choisie dès que n dépasse

(¹) C'est là une propriété toute semblable à une propriété connue des nombres formés rationnellement avec une racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels. Aussi peut-on dire que les nombres de H_1 sont *des nombres rationnels par rapport à l'ensemble* H_1, ou, pour abréger, *des nombres rationnels dans* H_1; un nombre racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels dans H_1 pourra être dit *un nombre algébrique dans* H_1 *ou par rapport à* H_1.

une certaine limite c. On pourra parfois assigner à α un caractère plus précis.

Je spécifie par exemple dans (2_3) et (4_3) que, au moins à partir d'une certaine valeur de n, pour chaque nombre ξ, ξ', ...,

$$(14_3) \qquad |\eta_n| = Q_n^{-\beta_n}, \qquad \beta_n > a\varphi_n,$$

où φ_n est une fonction croissante déterminée de n, la même pour tous les nombres transcendants considérés, a ayant une valeur fixe, $\neq 0$, et indépendante de n, qui peut varier d'un des nombres à l'autre.

Les nombres α_1, α_1, α_2, qui interviennent dans (6_3 *bis*), (8_3), (10_3) et (13_3) respectivement, peuvent être choisis de la forme $k\beta_n$, où $k > 0$ est limité supérieurement et inférieurement, et satisfont alors à la condition (14_3). Par conséquent :

L'ensemble H_2 *formé des nombres de* H_1 *qui satisfont à la condition* (14_3) *et des nombres rationnels forme un groupe par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique; ce groupe est contenu dans* H_1.

Propriétés des dénominateurs Q_n *de la suite* ($1'_3$). — L'existence des conditions (2_3), (4_3), (14_3) entraîne pour les dénominateurs de la suite ($1'_3$) des conditions très restrictives :

Cas de (2_3) *et* (4_3). — Je prends dans la suite ($1'_3$) deux fractions consécutives qui ne sont pas égales, I_n, I_{n+1} : on a

$$\xi = I_n + f_n Q_n^{-\alpha} = I_{n+1} + f_{n+1} Q_{n+1}^{-\alpha}, \qquad |f_n| = \varepsilon_n,$$
$$\varepsilon_n Q_n^{-\alpha} + \varepsilon_{n+1} Q_{n+1}^{-\alpha} \geqq |I_n - I_{n+1}| \geqq (Q_n Q_{n+1})^{-1},$$

ou, puisque $Q_{n+1} \geqq Q_n$,

$$(15_3) \qquad Q_n^{-1} Q_{n+1}^{-1} \leqq 2 Q_n^{-\alpha}, \qquad Q_{n+1} \geqq \frac{1}{2} Q_n^{\alpha-1}.$$

Par conséquent, α pouvant être pris aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand, Q_{n+1} doit surpasser toute puissance fixée *a priori* de Q_n, quand n est assez grand.

J'ai supposé toutefois $I_n \neq I_{n+1}$. Soit $I_n = I_{n+1}$; s'il y a un seul ξ' des nombres correspondant à ξ et pour lequel les deux fractions

correspondantes I'_n et I'_{n+1} ne soient pas égales, on aura

$$Q'_{n+1} > \frac{1}{2} Q'^{\alpha-1}_n,$$

ou, d'après (4_3),

$$Q^{\sigma_{n+1}}_{n+1} > \frac{1}{2} Q^{\sigma_n(\alpha-1)}_n.$$

A partir d'une certaine valeur de n, σ_n reste compris entre des limites supérieures et inférieures déterminées l_1 et l_2, avec $l_1 > l_2$, et

$$(16_3) \qquad \sigma_n \sigma^{-1}_{n+1} \geqq l_2 l_1^{-1}, \qquad Q_{n+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{l_1^{-1}} Q_n^{l_2 l_1^{-1}(\alpha-1)}.$$

A partir d'une certaine valeur de n, Q_{n+1} doit encore surpasser toute puissance fixée *a priori* de Q_n.

Si les fractions I'_n et I'_{n+1} sont égales pour tous les nombres $\xi, \xi', \ldots$ de H, on peut évidemment supprimer l'une d'elles dans chaque suite ($1'_3$) et (3_3). Finalement :

D'après les conditions (2_3) *et* (4_3) *on peut toujours supposer que la suite* ($1'_3$) *soit telle que, pour toute valeur fixe arbitraire de* α', *on a, à partir d'une certaine valeur* ν_1 *de* n,

$$(17_3) \qquad Q_{n+1} > Q_n^{\alpha'} \text{ (1)}.$$

La valeur ν_1 pourra évidemment varier avec celui des nombres transcendants $\xi, \xi', \ldots$ considérés.

Cas de (2_3), (4_3) *et* (14_3). — (14_3) ayant lieu, (15_3) devient

$$Q_{n+1} > \frac{1}{2} Q_n^{a\varphi_n - 1} > Q_n^{a_1\varphi_n},$$

avec a_1 analogue à n et $\geqq \frac{a}{2}$. (16_3) est remplacé par une inégalité analogue. Finalement :

---

(1) Si la suite ($1'_3$), qui a pour limite un nombre transcendant ξ satisfaisant à (2_3), ne remplit pas cette condition, elle doit au moins renfermer une infinité de paires de fractions I_n, I_{n+1} consécutives inégales, et dont, par suite, les dénominateurs satisfont à (17_3). On peut faire une remarque correspondante pour (18_3).

D'après les conditions (2_3), (4_3) *et* (14_3) *on peut toujours supposer que la suite* ($1'_3$) *soit telle que, à partir d'une certaine valeur* ν_1 *de* n,

$$(18_3) \qquad Q_{n+1} > Q_n^{a'\varphi_n}$$

(a' *analogue à* a *et pouvant varier d'un nombre transcendant à l'autre de l'ensemble* H_2).

Remarque. — On peut encore considérer les nombres de Liouville tels que, dans (2_3) et (4_3), à partir d'une certaine valeur de n,

$$(19_3) \quad |\eta_n| = Q_{n+1}^{-g_n k_n}, \quad |\eta'_n| = Q'^{-g'_n k'_n}_{n+1}, \quad Q'_n = Q_n^{\varphi_n}, \quad k_n \geqq 1, \quad k'_n \geqq 1,$$

g_n, g'_n, φ_n étant des fonctions de la forme $n^{a(1+\zeta_n)}$ où a est un nombre positif, nul ou négatif indépendant de n, qui peut différer pour les fonctions g_n, g'_n, φ_n, et $\lim \zeta_n = 0$ pour $n = \infty$. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ peuvent encore être choisis dans les mêmes équations précitées de façon à satisfaire à (19_3). Donc :

L'ensemble H_3 *formé des nombres rationnels et des nombres transcendants de Liouville satisfaisant à la condition* (19_3) *forme un groupe par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique.*

Enfin, en raisonnant comme à propos de (15_3), on a ici, en admettant que $|\eta_n|$ ne croît jamais quand n croît :

$$(20_3) \qquad \begin{gathered} \xi - I_n = \eta_n = f_n Q_{n+1}^{-g_n k_n}, \qquad |f_n| = 1, \\ Q_{n+1}^{-g_n k_n} + Q_{n+2}^{-g_{n+1} k_{n+1}} \geqq |I_n - I_{n+1}| \geqq (Q_n Q_{n+1})^{-1}, \\ Q_n^{-1} Q_{n+1}^{-1} \leqq 2 Q_{n+1}^{-g_n k_n}, \qquad Q_{n+1}^{k_n g_n - 1} \leqq 2 Q_n; \end{gathered}$$

d'autre part, ξ étant un nombre transcendant de Liouville, d'après (2_3),

$$|\xi - I_n| = Q_{n+1}^{-g_n k_n} = \varepsilon_n Q_n^{-\alpha},$$

d'où

$$Q_n^{\alpha} < Q_{n+1}^{g_n k_n}, \qquad Q_n \leqq Q_{n+1}^{k_n g_n \alpha^{-1}};$$

donc

$$Q_{n+1}^{k_n g_n - 1} \leqq 2 Q_n < Q_n^2 \leqq Q_{n+1}^{2 k_n g_n \alpha^{-1}};$$

$k_n g_n$ étant évidemment positif, il faut

$$k_n g_n - 1 < 2 k_n g_n \alpha^{-1},$$

c'est-à-dire

$$(21_3) \qquad k_n g_n < (1 - 2\alpha^{-1})^{-1} \leqq 1 + \lambda_n,$$

λ_n tendant vers o quand n croît indéfiniment. Alors

$$Q_{n+1} \geqq Q_n^{\alpha k_n^{-1} g_n^{-1}} > Q_n^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Ceci, bien entendu, suppose $I_n \neq I_{n+1}$.

Je donne plus loin (p. 40, *Remarque III*) un exemple d'ensemble ou groupe H_3. Ces ensembles H_3 joueront un rôle important dans le Chapitre V; on les retrouvera au Chapitre X.

Exemples de groupes H_1, H_2, H_3. — Avant d'aller plus loin, je crois utile de donner un exemple de groupe H_1, H_2 et H_3.

Soit γ_n un entier fonction croissante de n, b un entier, N un nombre représenté dans le système de numération de base b, dont le $\gamma_n^{\text{ième}}$ chiffre significatif à droite de la virgule est $\neq$ o, quel que soit n, et est suivi d'au moins $\gamma_n(\lambda_n - 1)$ zéros, λ_n croissant constamment et indéfiniment avec n. On a, en posant

$$(22_3) \qquad \begin{cases} Q_n = b^{\gamma_n}, \qquad I_n = \dfrac{P_n}{Q_n}, \\ N = I_n + e_n b^{-\gamma_n \lambda_n} = I_n + e_n Q_n^{-\lambda_n}, \qquad 0 < e_n < 1. \end{cases}$$

La suite $(1'_3)$ qui correspond à N satisfait à (2_3), et N est un nombre transcendant de Liouville, si N a une infinité de chiffres significatifs $\neq$ o, ce que je suppose. Ici

$$\gamma_{n+1} \geqq \gamma_n \lambda_n + 1.$$

On obtient une infinité (¹) de nombres N en prenant $\gamma_{n+1} \geqq \gamma_n \lambda_n + h$, avec h entier > 1, et donnant aux chiffres significatifs qui suivent le $(\gamma_n \lambda_n)^{\text{ième}}$ jusqu'au $\gamma_{n+1}^{\text{ième}}$ exclusivement les valeurs o, 1, ..., $b - 1$. Les nombres N ainsi définis sont des nombres correspondants, avec $Q'_n = Q_n$ et $\sigma_n = 1$; avec tous leurs correspondants et les nombres

---

(¹) L'ensemble de ces nombres (au sens de M. Cantor) *a la puissance du continu*. D'après une remarque [note (¹)] de la page 32, il existe, en dehors de ces nombres, d'autres nombres transcendants dont l'ensemble a la puissance du continu.

rationnels, ils forment un groupe H_1 donnant lieu aux relations (2_3) et (4_3); si même ils satisfont à $\lambda_n > a\varphi_n$, ils forment un groupe H_2 donnant lieu aux relations (2_3), (4_3) et (14_3).

Pour fixer mieux les idées, je prends pour n assez grand

$$\gamma_{n+1} = 2^n\gamma_n \quad (\gamma_0 \text{ entier}), \qquad \lambda_n = n^k, \quad k \text{ entier.}$$

On a

$$(23_3) \qquad \gamma_{n+1} = 2^n\gamma_n > \gamma_n\lambda_n + h = n^k\gamma_n + h, \qquad b^{\gamma_n\lambda_n} = Q_n^{n^k}$$

dès que n est assez grand; on obtient alors un groupe H_2. On obtiendra encore un groupe H_2 en spécifiant en outre, par exemple, que le $(\gamma_n\lambda_n + 1)^{\text{ième}}$ chiffre significatif à droite de la virgule est $\neq 0$; si N_k est le nombre considéré,

$$b^{-\gamma_n\lambda_n} \geqq N_k - I_n \geqq b^{-1-\gamma_n\lambda_n},$$
$$N_k - I_n = \theta b^{-1-\gamma_n n^k} = Q_n^{-a_n\varphi_n}, \qquad 1 \leqq \theta \leqq b,$$

avec

$$\theta b^{a_n\gamma_n\varphi_n} = b^{1+\gamma_n n^k} = b^{a_n\gamma_n\varphi_n + \log\theta},$$

le logarithme étant choisi dans le système de base b.

On pourra prendre

$$(24_3) \qquad \varphi_n = n^k, \qquad a_n = \frac{\gamma_n n^k + 1 - \log\theta}{\gamma_n n^k} = 1 + \varepsilon,$$

ε tendant vers o quand n croît indéfiniment.

Remarque I. — Les nombres N sont ici tels qu'on peut leur faire correspondre une suite ($1'_3$) ou (3_3), où les Q_n sont tous des puissances de b. Mais rien ne prouve que tous leurs correspondants aient la même propriété. Toutefois, d'après ce qu'on a vu à propos de l'addition, la soustraction et la multiplication des nombres de H_1, les Q_n ayant tous même valeur pour les nombres N, on voit que ces trois opérations effectuées sur les nombres N donnent naissance à des nombres N' définis par des suites analogues à (3_3) et où les dénominateurs Q'_n sont des puissances de b :

$$Q'_n = b^{\log Q'_n},$$

$\log Q'_n$ étant entier et pris dans le système de base b. Par conséquent :

Par addition, soustraction et multiplication les nombres N *donnent des nombres ayant une forme analogue à celle des nombres* N, *c'est-à-dire qui présentent à droite de la virgule après le* $(\log Q'_n)^{\text{ième}}$ *chiffre significatif une suite de zéros dont l'étendue croît avec* n (¹).

Remarque II. — En faisant varier k dans (24_3), on obtient des nombres N_k différents pour chaque valeur de k quand le

$$(\gamma_n \lambda_n + 1)^{\text{ième}} = (\gamma_n n^k + 1)^{\text{ième}}$$

chiffre significatif est $\neq 0$, tous les précédents jusqu'au $\gamma_n^{\text{ième}}$ étant nuls. On en déduit une suite de groupes analogues à H_2, que je désigne par $H_2^{(1)}, H_2^{(2)}, \ldots, H_2^{(k)}, \ldots$, et l'on pourra se poser la question, que je n'élucide pas, de savoir si ces groupes sont distincts.

Je me contenterai ici d'observer ce qui suit au sujet des groupes $H_2^{(k)}$: 1° la somme ou la différence Σ de deux nombres N_k correspondant à une valeur de k peut ne pas être un nombre N_k, car le $\gamma_n^{\text{ième}}$ chiffre significatif à droite de la virgule peut être nul dans Σ : mais Σ possédera à droite du $\gamma_n^{\text{ième}}$ chiffre significatif au moins $\gamma_n(n^k - 1) - 1$ zéros; 2° le produit Π de λ nombres N_k possédera à droite du $(\lambda\gamma_n)^{\text{ième}}$ chiffre significatif au moins $\gamma_n(n^k - \lambda) - m_\lambda$ zéros, où m_λ est limité en fonction de λ et des nombres N_k considérés : on le voit facilement pour $\lambda = 2, 3, \ldots$ à l'aide des formules (9_3) et suivantes.

Soit L_k l'ensemble des nombres transcendants déduits des N_k par addition, soustraction et multiplication : N_{k-j} possède à droite du $\gamma_n^{\text{ième}}$ chiffre significatif, qui est $\neq 0$, $\gamma_n(n^{k-j} - 1)$ zéros, et n'en a pas davantage, à droite du $(\lambda\gamma_n)^{\text{ième}}$ chiffre significatif, au plus $\gamma_n(n^{k-j} - \lambda)$ zéros, nombre qui est plus petit que $\gamma_n(n^k - \lambda) - m_\lambda$, dès que n est assez grand. Il en résulte que N_{k-j} n'est pas contenu dans L_k. Finalement, on arrive à cet énoncé :

(¹) Au besoin, pour plus de clarté, comparer avec ce qui est dit Chapitre VII à propos des fractions quasi-périodiques, en remarquant que, dans $I_n = P_n Q_n^{-1}$, Q_n est une puissance de b.

Soit N_k (*k entier donné*) *un quelconque des nombres transcendants qui, dans le système de numération de base b entière donnée, ont, à partir d'une certaine valeur de n :*

1° *Leur* $\gamma_n^{ième}$ *chiffre significatif à droite de la virgule* $\neq 0$, *avec* $\gamma_{n+1} = 2^n \gamma_n$ (γ_0 *entier*);

2° *Une suite de zéros comme chiffres significatifs à droite du* $\gamma_n^{ième}$, *jusqu'au* $(\gamma_n n^k + 1)^{ième}$, *qui est* $\neq 0$.

Soit encore L_k *le groupe des nombres déduit des nombres* N_k *par addition, soustraction et multiplication. Aucun des groupes* $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$ *ne contient un quelconque des groupes précédents. Ces groupes, formés exclusivement de nombres rationnels ou de nombres transcendants présentant des suites de zéros de plus en plus longues au fur et à mesure qu'on s'éloigne à droite de la virgule, sont tous distincts.*

Remarque III. — On obtient un ensemble H_3 (p. 36) en partant des nombres

$$\xi = \sum m_n b^{-(n!)^k},$$

où $m_n \neq 0$, positif ou négatif, $|m_n|$ entier limité, b entier $\geqq 2$, k entier > 0, et posant

$$P_n Q_n^{-1} = \sum_1^n m_n b^{-(n!)^k},$$

$$Q_n = b^{(n!)^k}, \qquad Q_{n+1} = Q_n^{(n+1)^k} = b^{[(n+1)!]^k};$$

on a

$$|\xi - P_n Q_n^{-1}| = \mu_n b^{-[(n+1)!]^k},$$

où μ_n est fini $\neq 0$, et

$$|\xi - P_n Q_n^{-1}| = \mu_n Q_{n+1}^{-1} = Q_{n+1}^{-(1+\varepsilon_n)} \qquad (\lim \varepsilon_n = 0 \text{ pour } n = \infty).$$

Sur le développement en fractions continues des puissances d'irrationnelles. — D'après ce qu'on a vu précédemment, si ξ et ξ' sont deux nombres transcendants correspondants, I_n, I'_n deux fractions correspondantes des développements $(1'_3)$ et (3_3), on peut définir $\xi \pm \xi'$, $\xi\xi'$, $\xi\xi'^{-1}$ comme limites des suites de quantités $I_n \pm I'_n$,

$I_n I'_n$, $I_n I'^{-1}_n$ corrélatives. Si, en particulier, ξ, ξ' et les I_n, I'_n sont réels, on voit que $I_n \pm I'_n$, $I_n I'_n$, $I_n I'^{-1}_n$ sont des réduites du développement en fraction continue de $\xi \pm \xi'$, $\xi\xi'$, $\xi\xi'^{-1}$, d'après la propriété n° 8 du Chapitre I. C'est évidemment là une propriété tout à fait remarquable des nombres réels de Liouville qui sont toujours, comme on l'a vu, limites de suites de fractions I_n réelles ([1]). Elle peut d'ailleurs servir à les caractériser, comme on va le voir. On remarquera, dès à présent, que ξ^p, où p est entier, aura, dans la suite (3_3) qui lui correspond, une infinité de fractions $\frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{P^p_n}{Q^p_n}$, c'est-à-dire de fractions rationnelles qui sont des puissances $p^{\text{ièmes}}$ exactes.

Je considère, en général, une irrationnelle I dont $I_n = \frac{\varpi_n}{\chi_n}$ est une réduite d'ordre n; d'après (13) (p. 8)

$$(25_3)\quad \begin{cases} [2\chi_n^2(a_{n+1}+1)]^{-1} < (2\chi_n\chi_{n+1})^{-1} < |I - I_n| \\ \qquad < (\chi_n\chi_{n+1})^{-1} < (a_{n+1}\chi_n^2)^{-1}. \end{cases}$$

On aura, p étant un entier quelconque,

$$(26_3)\quad \begin{cases} \lambda'_p[2\chi_n^2(a_{n+1}+1)]^{-1} < \lambda'_p|I - I_n| < |I^p - I_n^p| \\ \qquad \leqq |I - I_n|\,|I^{p-1} + I^{p-2}I_n + \ldots + I_n^{p-1}| \\ \qquad < \lambda_p|I - I_n| < \lambda_p(a_{n+1}\chi_n^2)^{-1}, \end{cases}$$

où λ_p, λ'_p restent limités, quel que soit n, pour toute valeur donnée de p. Or, pour que I^p_n soit une réduite de I^p, si $\frac{\varpi'_k}{\chi'_k}$ est cette réduite,

$$I^p = b_0 + 1 : b_1 + 1 : \ldots + 1 : b_k + \ldots,$$

il faut

$$(2\chi'_k\chi'_{k+1})^{-1} < |I^p - I^p_n| < (\chi'_k\chi'_{k+1})^{-1}, \qquad \chi'_k = \chi^p_n,$$

d'où

$$(27_3)\quad \lambda'_p[2\chi_n^2(a_{n+1}+1)]^{-1} < \lambda'_p|I - I_n| < (\chi'_k\chi'_{k+1})^{-1} < \chi'^{-2}_k = \chi_n^{-2p},$$

$$(28_3)\quad (2\chi'_k\chi'_{k+1})^{-1} < \lambda_p|I - I_n| < \lambda_p a^{-1}_{n+1}\chi_n^2,$$

$$(29_3)\quad \lambda'_p\chi_n^{2p} < 2\chi_n^2(a_{n+1}+1), \qquad |I - I_n| < (\lambda'_p\chi_n^{2p})^{-1}.$$

On déduit d'abord de là

$$(30_3)\quad a_{n+1} > \chi_n^{(2p-2)(1-\eta_n)} \qquad (\lim \eta_n = 0 \text{ pour } n = \infty).$$

([1]) Je ne m'occupe pas ici de l'extension au cas où ξ est imaginaire : c'est là un intéressant sujet d'études.

Or, en général,

$$\chi_{i+2} \geqq \chi_{i+1} + \chi_i > 2\chi_i, \quad \ldots, \quad \chi_{i+2j} > 2^j \chi_i;$$

par suite,

$$\chi_{2j+1} > 2^j \chi_1, \quad \chi_{2j} > 2^j \chi_0,$$

c'est-à-dire

$$\chi_{2j+1} > \chi_{2j} > 2^j \chi_0 \geqq 2^j$$

et

$$(31_3) \qquad \chi_n > 2^{\frac{n-1}{2}} \chi_0 \geqq 2^{\frac{n-1}{2}},$$

quel que soit $n \geqq 1$. D'après (30_3),

$$(31_3 \; bis) \qquad a_{n+1} > 2^{(n-1)(p-1)(1-\eta_n)}.$$

Quand p est donné, ceci ne peut avoir lieu pour une infinité de valeurs de n que si I a son développement en fraction continue ordinaire d'ordre au moins égal à (1, 1), d'après les définitions du Chapitre I, n° 10; mais il faut de plus que la deuxième inégalité (29_3) ait lieu, ce qui, d'après le théorème de Liouville (Chapitre II), n'est pas le cas pour les nombres algébriques de degré $< 2p$. Enfin, s'il y a une infinité de valeurs de p telles que, pour chacune d'elles, (29_3) ait lieu pour une infinité de valeurs de n, d'après $(1'_3)$ et (2_3), I satisfait aux conditions qui définissent les nombres transcendants de Liouville.

Réciproquement, quand I est un nombre transcendant réel de Liouville, il est tel que la suite $(1'_3)$ correspondante renferme une infinité de fractions rationnelles réelles distinctes (¹) $I_n = \varpi_n \chi_n^{-1}$; on a

$$(32_3) \qquad |I - I_n| = \varepsilon_n \chi_n^{-\alpha}, \qquad 0 < \varepsilon_n \leqq 1$$

(α arbitraire), pour toute valeur de n plus grande que ν telle que I_n soit réel. D'après le n° 8 du Chapitre I, I_n est réduite de I; d'après (26_3), on a, pour p entier arbitraire,

$$|I^p - I_n^p| < \lambda_p |I - I_n| < \lambda_p \, \varepsilon_n (\chi_n^p)^{-\frac{\alpha}{p}} < \varepsilon'_n (\chi_n^p)^{-\alpha'},$$

(¹) $\varpi_n \chi_n^{-1}$ est ici la fraction irréductible égale à I_n : (32_3) résulte *a fortiori* de (2_3).

où ε'_n et $\alpha' = \frac{\alpha - 1}{p}$ sont analogues à ε_n et α, dès que n est assez grand et I_n réel. D'après le n° 8 du Chapitre I, I_n^p est une réduite de I.

Par conséquent [1] :

Théorème II_3. — *Soient* I *une irrationnelle réelle,* I_n *une de ses réduites, d'ordre* n, $P_n Q_n^{-1}$:

1° *Si, pour une infinité de valeurs de* n *et une valeur donnée de l'entier* p, I_n^p *est une réduite de* I^p, *pour ces valeurs de* n

$$|I - I_n| = \mu_p Q_n^{-2p},$$

où μ_p *est limité supérieurement quel que soit* n; *en même temps le quotient incomplet* a_{n+1} *du développement en fraction continue de* I *est tel que*

$$(31_3\ bis) \quad a_{n+1} > Q_n^{(2p-2)(1-\eta_n)} > 2^{(n-1)(p-1)(1-\eta_n)} \qquad (\lim \eta_n = 0 \text{ pour } n = \infty).$$

I *ne peut être une irrationnelle algébrique de degré* $< 2p$.

Réciproquement, si

$$a_{n+1} > Q_n^{2p-2+\varepsilon},$$

pour une valeur de ε *fixe positive et une infinité de valeurs* n_1 *de* n, $I_{n_1}^r$ *est réduite de* I^r *quand* $r \leqq p$ [2].

---

(1) De même, si le développement en fraction continue d'une irrationnelle réelle I possède une infinité de quotients incomplets a_{n+1} satisfaisant à une inégalité analogue à (30_3)

$$a_{n+1} > Q_n^q \quad (q \text{ positif, entier ou non}),$$

on a

$$|I^p - I_n^p| < \lambda_p a_{n+1}^{-1} Q_n^{-2} < \lambda_p Q_n^{-q-2} = \lambda_p (Q_n^p)^{-\frac{q+2}{p}},$$

d'après (26_3), et I_n^p sera réduite de I, d'après le n° 8 du Chapitre I, quand

$$q + 2 > 2p$$

ou

$$q > 2p - 2.$$

On conclura plus loin de $(31_3\ bis)$, au Chapitre VI, p. 123, que, si I_n est une réduite de e, I^p ne peut être réduite de e^p (p entier $\geqq 2$).

(2) Car $|I^p - I_{n_1}^p| < \lambda_p a_{n+1}^{-1} Q_n^{-2} < \lambda_p Q_n^{-2p-\varepsilon}$ d'après (26_3).

2° *S'il y a une infinité de valeurs de p telles que, pour chacune d'elles,* I_n^p *soit une réduite de* I^p *pour une infinité de valeurs de n,* I *est un nombre transcendant de Liouville.*

Réciproquement, quand I *est un nombre transcendant réel de Liouville, il y a, quel que soit l'entier p, une infinité de valeurs de n telles que* I_n^p *soit réduite de* I^p *quand* I_n *est une réduite de* I.

Le développement en fraction continue d'un nombre de Liouville renferme une infinité de quotients incomplets satisfaisant à (31_3 bis), *où p est arbitraire.*

On voit ainsi que les nombres de Liouville réels sont des êtres arithmétiques particulièrement remarquables. Ce sont les seuls nombres jouissant de la propriété que l'on vient de trouver : elle pourrait donc servir à les définir. Parmi les réduites de leurs puissances $p^{\text{ièmes}}$, il y en a une infinité qui sont des puissances $p^{\text{ièmes}}$ quel que soit l'entier p.

Ceci amène à examiner la question suivante : Qu'est-ce que la racine $p^{\text{ième}}$ d'un nombre de Liouville réel? C'est évidemment un nombre transcendant; mais est-ce un nombre de Liouville?

Soit un nombre de Liouville réel qui renferme parmi ses réduites une infinité de puissances $p^{\text{ièmes}}$: je le désignerai par I^p, et soit I_n^p une de ses réduites puissance $p^{\text{ième}}$ exacte, avec $I_n = \varpi_n \chi_n^{-1}$. On a, pour une infinité de valeurs de n,

$$|I^p - I_n^p| = \varepsilon_n \chi_n^{-p\alpha} \qquad (0 < \varepsilon_n \leqq 1)$$

et, en raisonnant comme dans (26_3),

$$\lambda'_p |I - I_n| < |I^p - I_n^p| = \varepsilon_n \chi_n^{-p\alpha}.$$

Donc I est un nombre de Liouville.

Inversement, d'après ce qu'on a vu au théorème précédent, si I est un nombre réel de Liouville, I^p est un nombre correspondant de I et renferme parmi ses réduites une infinité de puissances $p^{\text{ièmes}}$. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que la racine $p^{\text{ième}}$ *d'un nombre* N *de Liouville réel soit un nombre de Liouville est que ce nombre* N *renferme, parmi ses réduites, une infinité de puissances* $p^{\text{ièmes}}$ *exactes.*

Il résulte de là que, si le nombre de Liouville réel I ne renferme pas parmi ses réduites une infinité de puissances $p^{\text{ièmes}}$ exactes, $I^{\frac{1}{p}}$, qui est transcendant, n'est pas un nombre de Liouville.

Dès lors, on est immédiatement conduit à faire, entre la théorie de l'ensemble E des nombres rationnels et celle de l'ensemble H_1 formé des nombres de Liouville correspondants et des nombres rationnels, un nouveau rapprochement, en dehors de celui qui a été fait précédemment (note 1, p. 33).

Les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, exécutées sur chaque ensemble, donnent un nombre de l'ensemble; de plus, la racine $p^{\text{ième}}$ d'un nombre réel de chaque ensemble n'appartient à l'ensemble que sous des conditions similaires; on sait, dans E et H_1, définir le carré parfait, le cube parfait, ..., la puissance $p^{\text{ième}}$ exacte pour les nombres réels. Si l'on pouvait caractériser le nombre *entier* réel dans l'ensemble H_1, on arriverait probablement à pouvoir édifier avec les nombres de Liouville une arithmétique analogue à l'arithmétique ordinaire, et même une théorie des nombres qui dépendent algébriquement de ceux de H_1, comme on l'a fait pour les nombres algébriques ordinaires (Kummer, Dedekind, etc.) [1].

---

[1] Ce qui précède montre l'existence d'un ensemble K de nombres, *distinct de* H_1, comprenant H_1, et formé des nombres racines des équations algébriques dont les coefficients sont des fonctions rationnelles à coefficients rationnels des nombres H_1 : K est à H ce que l'ensemble des nombres algébriques ordinaires est à E. K est distinct de H_1, car $\xi^{\frac{1}{p}}$ en fait partie : de même, si β est un nombre algébrique quelconque, $\beta\xi$ fait partie de K. *Comparer* notes (1), p. 32 et 33.

D'autre part, soit $\xi = \xi_1 + i\xi'_1$ un nombre imaginaire de Liouville défini par une suite $(1'_3)$,

$$I_n = \frac{P_n}{Q_n} = i_n + i.i'_n, \qquad \frac{p_n}{Q_n} = i_n, \qquad \frac{p'_n}{Q_n} = i'_n, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

On a

$$|\xi - I_n| = \varepsilon_n Q_n^{-\alpha}, \qquad 0 < \varepsilon_n \leqq 1,$$
$$|\xi - i_n + i(\xi'_1 - i'_n)| = \varepsilon_n Q_n^{-\alpha},$$
$$|\xi_1 - I_n|^2 = (\xi_1 - i_n)^2 + (\xi'_1 - i'_n)^2 = \varepsilon_n^2 Q_n^{-2\alpha};$$

d'où, *a fortiori,*

$$|\xi_1 - i_n| = \zeta_n Q_n^{-\alpha}, \qquad 0 \leqq \zeta_n < \varepsilon_n \leqq 1,$$
$$|\xi'_1 - i'_n| = \zeta'_n Q_n^{-\alpha}, \qquad 0 \leqq \zeta'_n < \varepsilon_n \leqq 1, \qquad 0 < \zeta_n + \zeta'_n.$$

Il ne sera pas inutile à ce propos de donner un exemple de nombres transcendants de Liouville qui ne soit puissance d'aucun nombre transcendant de même nature. Je prends le nombre

$$I = A + \sum_{1}^{\infty} c_n q^{-2^{n^2}} \qquad (\text{A entier, } c_n \text{ entier}),$$

où q est un nombre premier, et $0 \leqq c_n < q$. Ici, on peut prendre

$$I_n = A + \sum_{1}^{n} c_n q^{-2^{n^2}} = P_n Q_n^{-1},$$

$$Q_n = q^{2^{n^2}}, \qquad P_n = c_n + \mu q \qquad (\mu \text{ entier}),$$

P_n et Q_n sont premiers entre eux.

$$I - I_n < (c_{n+1} + 1) q^{-2^{(n+1)^2}} \leqq q^{1-2^{(n+1)^2}} = Q_n^{\nu_n} = q^{-2^{n^2}\nu_n}$$

avec

$$\nu_n = \frac{2^{n^2} 2^{2n+1} - 1}{2^{n^2}} = 2^{2n+1} - 2^{-n^2}.$$

Il en résulte que ξ_1 et ξ'_1 sont des nombres de Liouville réels (l'un des deux pouvant être rationnel), limites respectivement des suites des fractions *réelles*

$$i_n = \frac{p_n}{Q_n}, \qquad i'_n = \frac{p'_n}{Q_n}.$$

Donc

Un nombre imaginaire de Liouville $\xi = \xi_1 + i\xi'_1$ est tel que sa partie réelle ξ_1 et le coefficient de sa partie imaginaire ξ'_1 sont des nombres réels de Liouville (l'un des deux pouvant être rationnel).

C'est une nouvelle analogie avec les nombres imaginaires rationnels.

Je suppose qu'un nombre $I = a + bi$ de Liouville imaginaire soit puissance $p^{\text{ième}}$ exacte d'un nombre $\xi = \xi_1 + i\xi'_1$ de Liouville; $\xi_1 + i\xi'_1$ est la limite d'une suite de fractions $I_n = i_n + i.i'_n$, et $a + bi$ la limite de la suite des quantités I_n^p.

Inversement, si $a + bi = I^p$ est la limite d'une suite de fractions $I_n^p = (i_n + i.i'_n)^p$ satisfaisant à

$$|I^p - I_n^p| = \varepsilon_n Q_n^{-p\alpha}, \qquad 0 < \varepsilon_n \leqq 1,$$

on a, comme dans (26_3),

$$\lambda'_p |I - I_n| < |I^p - I_n^p| = \varepsilon_n Q_n^{-p\alpha},$$

et I est un nombre imaginaire de Liouville.

On sait donc aussi caractériser un nombre de Liouville imaginaire, puissance $p^{\text{ième}}$ exacte.

D'après ($1'_3$) et (2_3), I est un nombre transcendant de Liouville s'il y a une infinité de valeurs de c_n différentes de zéro, ce qui a forcément lieu quand I n'est pas rationnel. Soit

$$I_n = \left(\frac{C}{D}\right)^p \qquad \text{(C, D premiers entre eux).}$$

P_n et Q_n étant premiers entre eux, puisque q est premier,

$$D^p = q^{2^{n^2}}, \qquad C^p = P_n;$$

p divise 2^{n^2} et

$$p = 2^\theta \qquad (\theta \text{ entier});$$

donc

$$D = q^{2^{n^2-\theta}};$$

par suite

$$P_n = c_n + \mu q = C^p = C^{2^\theta} = (C^{2^{\theta-1}})^2,$$

et P_n doit être un carré. Le nombre c_n doit être, dans le système de numération de base q, le dernier chiffre d'un carré : il suffira de prendre pour c_n, quel que soit n, un nombre ne satisfaisant pas (1) à cette condition (ou la valeur o). Ainsi, pour $q = 3$, $c_n = 2$, pour une infinité de valeurs de n, les autres c_n étant nuls; pour $q = 5$, $c_n = 2$ ou 3 pour une infinité de valeurs de n, les autres c_n étant nuls; etc.

Remarque. — On peut se poser la question suivante que je n'élucide pas : soit I un nombre de Liouville, I' un autre nombre; soit I'' un des nombres I + I', I — I', I.I', I : I'; *I'' peut-il être un nombre de Liouville?* D'après le début de ce Chapitre, la condition nécessaire et suffisante pour que I'' soit un nombre de Liouville correspondant à I est que I' soit un nombre de Liouville correspondant à I ou un nombre rationnel. Quand I'' ou I' ne satisfait pas à ces conditions, c'est un sujet à étudier. Je ferai observer seulement qu'il sera équivalent d'examiner, quand I et I' sont réels, si, I'' et I étant des nombres de Liouville (non correspondants), I'' — I, I'' : I jouissent, au point de vue des réduites, de propriétés particulières.

---

(1) C'est-à-dire un non-résidu quadratique (mod q). Au surplus, l'impossibilité que I_n soit une puissance $p^{\text{ième}}$ pour une valeur *donnée* quelconque de p résulte du fait que $p = 2^\theta$.

Je vais maintenant m'occuper du problème suivant :

I étant une irrationnelle, I_n *une de ses réduites, et* pq^{-1}, $p'q'^{-1}$ *des nombres rationnels positifs ou négatifs; la quantité* $pq^{-1}I_n + p'q'^{-1}$ *peut-elle être une réduite de* $pq^{-1}I + p'q'^{-1}$ *supposé* > 0?

D'après (13) (Chap. I),

$$(33_2)\quad [2Q_n^2(a_{n+1}+1)]^{-1} < (2Q_nQ_{n+1})^{-1} < |I - I_n| < Q_n^{-1}Q_{n+1}^{-1} < Q_n^{-2}a_{n+1}^{-1}.$$

Dès lors, si $q > 0$, $q' > 0$,

$$pq^{-1}I + p'q'^{-1} = J.\quad pq^{-1}I_n + p'q'^{-1} = J_k,\quad p_1 = |p|,\quad p'_1 = |p'|,$$
$$|J - J_k| = |pq^{-1}(I - I_n)| < (qq'Q_n)^{-2}a_{n+1}^{-1}p_1qq'^2.$$

Soit

$$J_k = A_kB_k^{-1},$$

avec A_k et B_k premiers entre eux; on a [1]

$$(34_2)\quad \begin{cases} p_1^{-1}q'^{-1}Q_n \leqq B_k \leqq qq'Q_n, \\ |J - J_k| < B_k^{-2}a_{n+1}^{-1}p_1qq'^2, \end{cases}$$

et J_k est certainement une réduite de J si (Chap. I, n° 8),

$$a_{n+1} \geqq 2p_1qq'^2.$$

On en conclut de suite :

I. *Si l'irrationnelle* I *possède une infinité de quotients incomplets au moins égaux à l'entier r, et si* $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ *sont ses réduites, l'irrationnelle* $J = pq^{-1}I + p'q'^{-1} > 0$, *où* pq^{-1}, $p'q'^{-1}$ *sont des fractions rationnelles, avec* $2p_1qq'^2 \leqq r$, $p_1 = |p|$, *possède une infinité de réduites égales à* $pq^{-1}I_n + p'q'^{-1}$.

Cette propriété a lieu quels que soient p, q, p', q' *si l'on peut prendre r aussi grand qu'on veut.*

Exemple : soit $pq = 2$, $pq^{-1} = 2$ ou $\frac{1}{2}$, $a_{n+1} \geqq 4$; $2I_n$ est réduite de $2I$, et $\frac{I_n}{2}$ de $\frac{I}{2}$.

Si J_k est une réduite de J, et si

$$J = b_0 + 1 : b_1 + 1 : b_2 + \ldots,$$

---

[1] On peut le voir en réduisant successivement les fractions
$$pq^{-1}I_n \quad \text{et} \quad pq^{-1}I_n + p'q'^{-1}.$$

(13) et (33_3) donnent encore, d'après (34_3),

$$p_1 q^{-1}[2Q_n^2(a_{n+1}+1)]^{-1} < |J - J_k| < B_k^{-2} b_{k+1}^{-1} \leqq p_1^2 q'^2 Q_n^{-2} b_{k+1}^{-1};$$

d'où

$$(35_3) \qquad b_{k+1} < 2p_1 q q'^2 (a_{n+1}+1).$$

De même, I_n étant réduite de I,

$$I = qp^{-1}(J - p'q'^{-1}) = qp^{-1}J - qp'p^{-1}q'^{-1}, \qquad I_n = qp^{-1}J_k - qp'p^{-1}q'^{-1},$$

$$(36_3) \qquad a_{n+1} < 2p_1^3 q q'^2 (b_{k+1}+1).$$

Les quotients incomplets a_{n+1} sont limités supérieurement et inférieurement en fonction des b_{k+1}, et inversement; ceci en particulier a forcément lieu pour tous les quotients

$$a_{n+1} \geqq 2p_1 q q'^2 \quad \text{et} \quad b_{k+1} \geqq 2p_1^3 q q'^2.$$

Par conséquent :

II. *Si l'irrationnelle* I *possède une infinité de quotients incomplets supérieurs à tout nombre arbitraire, l'irrationnelle* $J = pq^{-1}I + p'q'^{-1} > 0$ *possède une infinité de réduites égales à* $pq^{-1}I_n + p'q'^{-1}$ *et de quotients incomplets correspondants aussi grands qu'on veut.*

D'après ce qui précède, si $a_{n+1} \geqq 2p_1 q q'^2$, J_k est réduite de J. De même, soit $J_{k'}$ une réduite de J, et

$$I_{n'} = qp^{-1}(J_{k'} - p'q'^{-1}) = qp^{-1}J_{k'} - qp'p^{-1}q'^{-1};$$

si $b_{k'+1} \geqq 2p_1^3 q q'^2$, $I_{n'}$ est réduite de I. D'après (35_3) et (36_3), à un quotient $a_{n+1} \geqq 2p_1 q q'^2$ de I correspond pour J un quotient b_{k+1} limité supérieurement et inférieurement en fonction de a_{n+1}; à un quotient $b_{k'+1} \geqq 2p_1^3 q q'^2$ de J correspond pour I un quotient $a_{n'+1}$ limité supérieurement et inférieurement en fonction de $b_{k'+1}$. Si tous les quotients incomplets de I sont limités et $\leqq a'$, un quotient incomplet de J sera forcément limité en fonction de a', s'il n'est pas plus petit que $2p_1^3 q q'^2$. On en conclut cette propriété remarquable :

III. *Soit* I *une irrationnelle dont tous les quotients complets sont limités et* $\leqq a'$; pq^{-1} *et* $p'q'^{-1}$ *étant des fractions rationnelles*

quelconques positives ou négatives

$$(q, q' > 0, |p| = p_1, |p'| = p'_1),$$

le développement en fraction continue de $J = pq^{-1}I + p'q'^{-1} > 0$ *a tous ses quotients incomplets limités supérieurement en fonction de* p_1, q, q' *et* a'.

Ces propriétés s'étendent au cas où

$$J = \frac{MI + N}{M'I + N'},$$

avec M, N, M', N' entiers positifs ou négatifs, $MN' - NM' \neq 0$ (¹).

En effet,

$$J - J_k = \frac{MI + N}{M'I + N'} - \frac{MI_n + N}{M'I_n + N'} = \mu_n(I - I_n).$$

Dès que n est assez grand, $|\mu_n|$ est limité supérieurement et inférieurement en fonction de M, N, M', N', I. Si

$$J_k = A_k B_k^{-1} = \frac{MP_n + NQ_n}{M'P_n + N'Q_n},$$

un diviseur commun au numérateur et au dénominateur du dernier membre divise $MN' - NM'$, comme on le voit facilement, du fait que P_n et Q_n sont premiers entre eux, et l'on en conclut

$$\lambda_1 Q_n < B_k < \lambda Q_n,$$

où λ_1, λ sont des fonctions positives de M, N, M', N', I. (33_3) donnera dès lors

$$|J - J_k| < B_k^{-2} a_{n+1}^{-1} \nu,$$

où ν est une fonction positive de M, N, M', N', I.

On obtient de suite une propriété tout à fait analogue à la propriété I, et une formule de même nature que (35_3). La considéra-

(¹) Quand $MN' - NM' = \pm 1$, on sait, d'après Serret (*Algèbre supérieure*, t. I, Paris, 5ᵉ édit., 1885, p. 34), que les développements en fraction continue de J et I sont terminés par les mêmes quotients complets ; plusieurs des propriétés établies ci-après sont alors évidentes. Mais il n'en est plus de même quand $|MN' - NM'| > 1$.

tion de

$$I = \frac{N'J - N}{M - M'J}$$

donne une formule du genre de (36_3). On a encore des propriétés semblables aux propriétés II et III.

Je vais encore établir le résultat suivant :

IV. *Soient*

$$\ldots \quad I_n, \quad I_{n'}, \quad \ldots$$

les réduites consécutives d'indice croissant assez grand telles que

$$\ldots \quad J_k = \frac{MI_n + N}{M'I_n + N'}, \qquad J_{k'} = \frac{MI_{n'} + N}{M'I_{n'} + N'}, \qquad \ldots$$

soient réduites de $J = \dfrac{MI + N}{M'I + N'}$: J *étant égal à*

$$b_0 + 1 : b_1 + 1 : b_2 + \ldots,$$

$b_{k+1} a_{n+1}^{-1}$ *et* $|k - k'|$ *sont limités supérieurement en fonction de* M, N, M', N', I, $n' - n$; *de même pour* $b_{k+2}, \ldots, b_{k'}$, *ou* $b_{k'+1}, \ldots, b_k$ *suivant que* $k' > k$ *ou* $k' < k$.

Soit

$$J_k = A_k B_k^{-1} \qquad (A_k,\ B_k \text{ premiers entre eux}).$$

D'après ce qui précède, les quotients $a_{n+2}, \ldots, a_{n'}$ ont une limite supérieure fonction de M, N, M', N', I.

On a

$$(37_3) \quad \begin{cases} Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1} < Q_n(a_{n+1} + 1), \\ Q_{n+2} < Q_{n+1}(a_{n+2} + 1) < Q_n(a_{n+1} + 1)(a_{n+2} + 1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_{n'} < Q_n(a_{n+1} + 1)(a_{n+2} + 1)\ldots(a_{n'} + 1) \leqq Q_n(a_{n+1} + 1)\, l^{n'-n-1}. \end{cases}$$

De même, si $k' > k$,

$$\begin{cases} B_{k+1} = B_k b_{k+1} + B_{k-1} > B_k b_{k+1}, \\ B_{k+2} > B_{k+1} b_{k+2} > B_k b_{k+1} b_{k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_{k'} > B_k b_{k+1} \ldots b_{k'}. \end{cases}$$

D'après (37_3) et

$$(38_3)\qquad \begin{gathered} B_{k'} < \lambda Q_{n'}, \qquad B_k > \lambda_1 Q_n, \\ B_k b_{k+1} \ldots b_{k'} < B_{k'} < \lambda Q_n (a_{n+1} + 1)\, l^{n'-n-1}, \\ \lambda_1 b_{k+1} \ldots b_{k'} < \lambda (a_{n+1} + 1)\, l^{n'-n-1}, \end{gathered}$$

et, puisque

$$(39_3)\qquad a_{n+1} + 1 < \lambda_2 b_{k+1}$$

[formule analogue à (36_3). λ_2 fonction de M, N, M′, N′, I],

$$b_{k+2} \ldots b_{k'} < \lambda \lambda_2 \lambda_1^{-1}\, l^{n'-n-1}.$$

Donc :

$b_{k+2}, \ldots, b_{k'}$ *sont limités supérieurement en fonction de* M, N, M′, N′, $n' - n$.

Je dis que $k' - k$ *est aussi limité supérieurement en fonction des mêmes quantités.* En effet, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{k+1} > B_k b_{k+1}, \qquad B_{k+2} > B_k b_{k+1}, \\ B_{k+3} \geqq B_{k+2} + B_{k+1} > 2 B_k b_{k+1}, \qquad B_{k+4} > 2 B_k b_{k+1}, \\ B_{k+5} > 2^2 B_k b_{k+1}, \qquad \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_{k'} > 2^{\frac{k'-k-2}{2}} B_k b_{k+1}, \end{array} \right.$$

et, d'après (37_3) et (38_3),

$$2^{\frac{k'-k-2}{2}} b_{k+1} \lambda_1 Q_n < 2^{\frac{k'-k-2}{2}} b_{k+1} B_k \leqq B_{k'} < \lambda Q_n (a_{n+1} + 1)\, l^{n'-n-1}.$$

D'après (39_3),

$$(40_3)\qquad 2^{\frac{k'-k-2}{2}} < \lambda \lambda_1^{-1} \lambda_2\, l^{n'-n-1},$$

ce qui limite $k' - k$ en fonction de M, N, M′, N′, I, $n' - n$.

Dans l'hypothèse $k' < k$, en admettant qu'elle soit possible, on a

$$(40_3\ bis)\qquad B_{k'} < B_k, \qquad \lambda_1 Q_{n'} < B_{k'} < B_k < \lambda Q_n.$$

Mais $Q_{n'} > Q_n$; donc $B_k B_{k'}^{-1}$ est limité supérieurement; des raisonnements analogues aux précédents montrent que $k - k'$ et même $b_{k'+1}, \ldots, b_k$ sont limités de la même manière en fonction de M, N,

M′, N′, I ($n' - n$ n'intervient pas); de même ici pour a_{n+1}, puisque

$$Q_{n+1} \leqq Q_{n'}, \qquad Q_{n+1} Q_n^{-1} \leqq Q_{n'} Q_n^{-1} < \lambda \lambda_1^{-1}.$$

Enfin $b_{k+1} a_{n+1}^{-1}$ est limité supérieurement d'après (35_3) ou une formule analogue. C. Q. F. D.

Voici encore une autre propriété :

V. *Soit une irrationnelle réelle* I *dont le développement en fraction continue ordinaire*

$$a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_n + \ldots$$

est d'ordre (k, ρ); *l'irrationnelle* $J = \frac{MI + N}{M'I + N'} > 0$, *où* M, N, M′, N′ *sont des entiers réels positifs ou négatifs, avec* $MN' - NM' \neq 0$, *a son développement en fraction continue ordinaire*

$$b_0 + 1 : b_1 + \ldots + 1 : b_n + \ldots$$

du même ordre (¹).

(¹) Dans l'énoncé corrélatif, exact d'ailleurs, que j'ai donné aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (28 août 1905, t. CXLI, p. 418), $e_k(n^{\rho\pm1})$ doit ici être remplacé par $e_k(n)^{\rho\pm1}$ quand k est < 0.

L'énoncé V induit à penser que peut-être toute fonction rationnelle à coefficients entiers de I jouit en général de la même propriété; *voir* Note II à la fin du Volume. Peut-être aussi peut-on croire que l'ordre de la somme $I \pm I'$ et du produit II' de deux irrationnelles I et I′ est égal en général au plus grand des ordres de ces deux irrationnelles, en particulier que, si I et I′ ont leurs quotients complets limités, il en est de même de $I \pm I'$ et de II'. Ce serait là un résultat très important à établir, s'il est exact. Voici une application éventuelle, parmi bien d'autres analogues qui se présentent à l'esprit : si p est entier > 0, on a $(\sqrt[4]{p})^2 = \sqrt{p}$; $\sqrt{p}$ a ses quotients incomplets limités; il en serait donc de même de $\sqrt[4]{p}$. Peut-être pourrait-on aller jusqu'à établir que tout nombre algébrique réel a les quotients incomplets de son développement en fraction continue limités (comp. *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1900, p. 404 et *Erratum,* p. 442, question 1986 posée par M. Bricard et par moi); le développement en fraction continue de $\frac{e-1}{2}$ indiqué ci-après montrerait dès lors que $\frac{e-1}{2}$ et e sont transcendants.

Il y aurait encore à examiner si les nombres correspondant à un même nombre transcendant ξ réel de Liouville, les nombres de l'ensemble H, par exemple (Chap. III, p. 28), n'ont pas leurs ordres en corrélation.

D'autre part, quand $J_k = \frac{MI_n + N}{M'I_n + N'}$ n'est pas réduite de J, on peut se demander si J_k n'est pas ce qu'on appelle (SERRET, *Algèbre supérieure*, p. 21) une *fraction convergente intermédiaire;* la même question se pose, dans le cas où J serait une fonction rationnelle $f(I)$ de I, pour $f(I_n)$.

La formule (40_3) donne, en y changeant k en h, k' en h',

$$h' - h < v(n' - n),$$

où v est une fonction de M, N, M', N', I. Cette formule est vraie *a fortiori* si $h' \leqq h$.

Soient alors $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_i}, \ldots$ les réduites considérées dans l'énoncé IV; $J_{h_1}, J_{h_2}, \ldots, J_{h_i}, \ldots$ les réduites correspondantes de J. On aura

$$\left\{\begin{array}{l} h_2 - h_1 \quad < v(n_2 - n_1), \\ h_3 - h_2 \quad < v(n_3 - n_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_i - h_{i-1} < v(n_i - n_{i-1}) \end{array}\right.$$

et, en additionnant,

$$h_i - h_1 < v(n_i - n_1).$$

Pourvu que i soit assez grand, on pourra écrire

$$h_i < v_1 n_i, \tag{41$_3$}$$

v_1 étant analogue à v.

Ceci posé, j'admets que I soit (Chap. I, n° 10) une fraction continue ordinaire $a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$, d'ordre $\leqq (k, \rho)$, où k est fini, ainsi que ρ.

Soit d'abord $k \geqq 0$; on a

$$a_n \leqq e_k(n^{\rho+\varepsilon})$$

dès que n est assez grand; d'après la formule (35_3) ou les formules analogues,

$$b_{h_j+1} < v_2 e_k[(n_j + 1)^{\rho+\varepsilon}], \tag{42$_3$}$$

et, pour les autres quotients incomplets b_θ,

$$b_\theta < v_3, \tag{43$_3$}$$

avec v_2, v_3 analogues à v.

Mais on peut raisonner [1] sur J et I comme on l'a fait sur I et J : on obtiendra ainsi, J_{h_i} et I_{n_i} étant toujours des réduites correspondantes

(1) On ordonne les J_{h_i} suivant les indices h_i croissants $n_1, n'_2, \ldots$, d'après la démonstration IV [formule $(40_3\ bis)$ ou analogue], $n'_i = h_i(1 - \varepsilon_i)$; pour I_{h_i}, qui correspond à J_{n_i}, $n_i = h_i(1 + \varepsilon_i)$; enfin $h'_i < v_1 n'_i$.

de J et I,

(44₃) $$n_i < v_1 h_i.$$

D'après (41_3) et (44_3), on peut écrire

$$n_i = v_i h_i,$$

où v_i est limité supérieurement et inférieurement; donc, d'après (42_3),

$$b_{h_i+1} < v_2 e_k[(v_i h_i + 1)^{\rho+\varepsilon}].$$

Cette formule reste vraie *a fortiori* pour les quotients b_θ dès que θ est assez grand, d'après (43_3). Finalement

(45₃) $$b_m < v_2 e_k[(v_m h_m + 1)^{\rho+\varepsilon}].$$

Or

$$v_m h_m + 1 < h_m^{1+\varepsilon},$$

dès que m est assez grand,

$$b_m < v_2 e_k\left[h_m^{(\rho+\varepsilon)(1+\varepsilon)}\right] < e_k(h_m^{\rho+\varepsilon'})$$

(ε' analogue à ε), c'est-à-dire que le développement en fraction continue de J est d'ordre au plus égal à celui de I (¹).

Soit maintenant $k < 0$: on raisonne de la même manière en remplaçant $e_k(n^{\rho+\varepsilon})$ par $e_k(n)^{\rho+\varepsilon}$, et l'on arrive à la formule analogue à (45_3)

$$b_m < v_2 e_k(h_m^{1+\varepsilon})^{\rho+\varepsilon} < e_k(h_m^{1+\varepsilon})^{\rho+2\varepsilon};$$

k étant négatif et $= -k_1$,

$$e_k(h_m^{1+\varepsilon}) = \log_{k_1} h_m^{1+\varepsilon} = \log_{k_1-1} \log h_m^{1+\varepsilon} < \log_{k_1-1}(\log h_m)^{1+\varepsilon}$$
$$< \log_{k_1-2}(\log_2 h_m)^{1+\varepsilon} < \ldots < \log(\log_{k_1-1} h_m)^{1+\varepsilon} < (\log_{k_1} h_m)^{1+\varepsilon};$$

donc

$$b_m < e_k(h_m)^{(1+\varepsilon)(\rho+2\varepsilon)} < e_k(h_m)^{\rho+\varepsilon'}.$$

Le développement en fraction continue de J est encore d'ordre au plus égal à celui de I.

(¹) Ces calculs restent exacts quel que soit le signe de k; par suite la propriété V est encore vraie dans la *deuxième classification* (Notes I et II à la fin du Volume) des fractions continues.

En raisonnant sur J et I comme on vient de le faire sur I et J, on voit que, si J est une fraction continue d'ordre $\leqq(k', \rho')$, il en est de même de I. On en conclut que les ordres de I et de J sont les mêmes.

C. Q. F. D.

Je considère maintenant, comme dans la note ([1]), p. 11, la fraction continue irrationnelle

$$J' = \alpha_0 + \beta_0 : \alpha_1 + \ldots + \beta_{l-1} : a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots,$$

avec

$$I = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots;$$

elle est de la forme

$$\frac{MI + N}{M'I + N'};$$

le développement en fraction continue ordinaire de J'

$$c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \ldots$$

est de même ordre que I. Ceci justifie l'extension indiquée dans cette note ([1]), p. 11, de la définition de l'ordre aux fractions J'. On voit qu'il n'y a pas lieu de craindre que cette extension conduise à attribuer plusieurs ordres différents à une même irrationnelle.

De même,

$$J' = a_s + 1 : a_{s+1} + 1 : a_{s+2} + \ldots, \qquad s \geqq 1$$

est de même ordre que I.

A titre d'exemple d'application, je reprends (p. 11) le développement en fraction continue de e indiqué antérieurement :

$$\frac{e-1}{2} = 1 : 1 + 1 : 6 \qquad + \ldots + 1 : 4n - 2 + \ldots,$$

$$e = 1 + 2 : 1 + 1 : 6 + \ldots + 1 : 4n - 2 + \ldots;$$

$\frac{e-1}{2}$ et e sont d'ordres (0, 1); de même pour $J = \frac{M(e-1) + 2N}{M'(e-1) + 2N'}$. De plus, le $n^{\text{ième}}$ quotient incomplet de $\frac{e-1}{2}$ croît indéfiniment avec n; donc, dès que n dépasse une certaine limite, si I_n est réduite de $\frac{e-1}{2}$,

$$\frac{MI_n + N}{M'I_n + N'}$$

est réduite de J; en particulier $2I_n + 1$ est réduite de e.

CHAPITRE IV.

LES NOMBRES TRANSCENDANTS CONSIDÉRÉS COMME RACINES DE SÉRIES INFINIES OU DE FRACTIONS CONTINUES.

Séries infinies à coefficients entiers.

1° *Nombres transcendants réels.* — Soient ζ_1 un nombre réel positif absolument quelconque < 1, M un autre nombre quelconque réel, c_0 un entier tel que $0 < M - c_0 \leqq 1$; si M est entier, $M - c_0 = 1$. Je divise $\varepsilon_0 = M - c_0$ par ζ_1; on a

$$\varepsilon_0 = M - c_0 = (c_1 + \varepsilon_1)\zeta_1,$$

où c_1 est le plus grand entier contenu dans $\frac{M - c_0}{\zeta_1}$, $0 \leqq \varepsilon_1 < 1$, $c_1 \leqq \zeta_1^{-1}$. De même, je divise ε_1 par ζ_1

$$\varepsilon_1 = (c_2 + \varepsilon_2)\zeta_1,$$

où $c_2 = E(\varepsilon_1 \zeta_1^{-1}) < \zeta_1^{-1}$ est le plus grand entier contenu dans $\varepsilon_1 \zeta_1^{-1}$, $\varepsilon_2 < 1$; .... En continuant de la sorte on obtient

$$(1_4) \qquad M = c_0 + c_1\zeta_1 + c_2\zeta_1^2 + \ldots + c_n\zeta_1^n + \ldots \quad (^1),$$

où $c_1 \leqq \zeta_1^{-1}$, $c_n < \zeta_1^{-1}$, dès que $n > 1$; la série du second membre est évidemment convergente; c'est ce que l'on pourrait être tenté d'appeler une *représentation du nombre* M *dans le système de numération de base* ζ_1^{-1}.

---

(1) En admettant pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ des valeurs positives ou négatives, de façon que $|\varepsilon_i| \leqq \frac{1}{2}$, et choisissant les c_i en conséquence, on obtient, au lieu de (1_4), une série où les c_i sont positifs ou négatifs, et, en valeur absolue, $\leqq \frac{1}{2}\zeta_1^{-1}$. On pourrait étudier ces séries de la même manière.

Pour ce Chapitre on pourra consulter E. Strauss, *Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise* (*Acta mathematica*, t. XI, p. 13-18).

Pour un nombre $\zeta'_1 \geqq 1$ on peut poser $\zeta_1 = \zeta_1'^{-1}$, quand $\zeta'_1 > 1$, $\zeta_1 < 1$, ou encore opérer de la manière suivante : soit Q un entier quelconque $> \zeta'_1$, $\zeta_1 = \zeta'_1 Q^{-1}$; par le procédé appliqué ci-dessus à ζ_1 l'on obtiendra le nombre M sous la forme

$$(2_4) \qquad M = c_0 + c_1 \frac{\zeta'_1}{Q} + \ldots + c_n \left(\frac{\zeta'_1}{Q}\right)^n + \ldots.$$

On peut aussi, quand ζ'_1 et Q' ne sont pas tous deux entiers, poser

$$\zeta'_1 - Q' = \zeta_1 < 1,$$

avec Q' entier ou non, et obtenir la forme

$$(2_4\ bis) \qquad M = c_0 + c_1(\zeta'_1 - Q') + \ldots + c_n(\zeta'_1 - Q')^n + \ldots.$$

Si l'on prend $M - c_0 = 1$, il en résulte en particulier ceci :

Tout nombre algébrique ou transcendant réel positif est racine d'une équation

$$(3_4) \qquad 1 = c_1 \zeta_1 + \ldots + c_n \zeta_1^n + \ldots,$$

quand $\zeta_1 < 1$, *et d'une équation*

$$(4_4) \qquad 1 = c_1 \zeta_1^{-1} + \ldots + c_n \zeta_1^{-n} + \ldots,$$

quand $\zeta_1 > 1$, c_n *étant un entier ordinaire positif respectivement* $\leqq \zeta_1^{-1}$ *ou* $\leqq \zeta_1$ (¹).

Mais l'on peut arriver à une analogie plus complète avec les systèmes de numération à base entière. Soit un nombre quelconque $\zeta > 1$; si $M > 1$, on peut trouver m tel que

$$(5_4) \qquad \zeta^{m+1} > M \geqq \zeta^m;$$

(¹) Si ζ_1^{-1} ou ζ_1 respectivement sont < 2, les c_n sont égaux à 0 ou 1. Il est bien entendu que ces séries, comme celles que l'on rencontrera dans la suite, peuvent se réduire à des polynomes par des valeurs particulières de M et ζ_1.

Pour $\zeta_1 < 1$, le développement (3_4) ne peut être limité que si ζ_1^{-1} est un entier algébrique; pour $\zeta_1 > 1$, (4_4) ne peut être limité que si ζ_1 est un entier algébrique.

si a_0 est le plus grand entier ordinaire $< \zeta$ contenu dans $M\zeta^{-m}$,

$$M = a_0\zeta^m + \alpha_0, \qquad \alpha_0 < \zeta^m;$$

alors, opérant sur α_0 comme on l'a fait sur M,

$$\begin{array}{lll}
\alpha_0 \;\; = a_1\zeta^{m-1} + \alpha_1, & 0 \leqq a_1 \;\; < \zeta, & \alpha_1 \;\; < \zeta^{m-1}, \\
\alpha_1 \;\; = a_2\zeta^{m-2} + \alpha_2, & 0 \leqq a_2 \;\; < \zeta, & \alpha_2 \;\; < \zeta^{m-2}, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\
\alpha_{m-2} = a_{m-1}\zeta \;\; + \alpha_{m-1}, & 0 \leqq a_{m-1} < \zeta, & \alpha_{m-1} < \zeta, \\
\alpha_{m-1} = a_m \;\; + \alpha_m, & 0 \leqq a_m \;\; < \zeta, & \alpha_m \;\; < 1,
\end{array}$$

$$M = a_0\zeta^m + a_1\zeta^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\zeta + a_m + \alpha_m.$$

J'applique maintenant à α_m et $\zeta^{-1} < 1$ la formule (1_4); on aura

$$\alpha_m = c_1\zeta^{-1} + \ldots + c_n\zeta^{-n} + \ldots,$$

$$(6_4) \quad M = a_0\zeta^m + a_1\zeta^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\zeta + a_m + c_1\zeta^{-1} + \ldots + c_n\zeta^{-n} + \ldots,$$

avec $c_n < \zeta$. C'est là ce que j'appellerai *la représentation canonique du nombre* M *dans le système de numération de base* ζ. Par extension de ce que l'on fait dans le cas où ζ est entier > 1 (par exemple si $\zeta = 10$), on pourra représenter M par le nombre

$$a_0 a_1 \ldots a_m, \quad c_1 c_2 \ldots c_m \quad \ldots.$$

On déduit de (6_4), comme tout à l'heure de (3_4) et de (4_4), que tout nombre réel positif, algébrique ou transcendant ζ est racine d'une infinité d'équations transcendantes d'une forme particulière à coefficients entiers, en prenant par exemple M entier ordinaire. Je n'insiste pas.

(6_4) peut encore s'écrire, en divisant les deux membres par ζ^m,

$$(6_4\ bis) \qquad M\zeta^{-m} = c'_0 + c'_1\zeta^{-1} + \ldots + c'_n\zeta^{-n} + \ldots.$$

Cette représentation canonique du nombre M, quand on donne ζ, est unique; il n'y en a pas d'autres de la même forme satisfaisant aux mêmes conditions [1], c'est-à-dire telles que les coefficients a_i et c_j,

---

[1] Cela est une conséquence de la manière dont j'ai formé (6_4); les autres formules (1_4), ... donnent lieu à une remarque analogue.

ou c'_j, sont $< \zeta$, et, de plus, que *la somme des termes qui suivent $a_i\zeta^i$ ou $c_j\zeta^{-j}$ est plus petite que ζ^i ou ζ^{-j} respectivement* (¹). Quand on ne tient pas compte de ces conditions, on peut trouver une infinité de représentations non canoniques du nombre M. En effet, soit

$$(7_4) \qquad 1 = c'_1\zeta^{-1} + c'_2\zeta^{-2} + \ldots + c'_n\zeta^{-n} + \ldots,$$

(¹) Cette dernière restriction est absolument nécessaire en général. Si l'on choisissait au hasard les coefficients c_i par exemple, de façon seulement qu'ils soient $< \zeta$, on pourrait obtenir des représentations qui ne sont pas du type (6_4).

En effet, je suppose que, dans (6_4), les coefficients c_i, c_{i+j}, c_{i+2j}, ..., dont les indices sont en progression arithmétique, soient tous égaux à $E(\zeta)$, ζ n'étant pas entier. La somme Σ_i des termes à partir de $c_i\zeta^{-i}$ est au moins égale à

$$E(\zeta)(\zeta^{-i} + \zeta^{-i-j} + \ldots) = \zeta^{-i}E(\zeta)(1 - \zeta^{-j})^{-1},$$

qui sera au moins égal à ζ^{-i+1} si

$$E(\zeta) > \zeta - \zeta^{1-j}, \qquad \zeta - E(\zeta) < \zeta^{1-j};$$

ceci peut avoir lieu au moins pour de petites valeurs de j, et a toujours lieu pour $j = 1$; mais alors, d'après la façon dont on trouve (6_4), pour obtenir cette forme (6_4), il aurait fallu choisir c_{i-1} plus grand d'une unité au moins.

Il en résulte en particulier cette conséquence, quand le développement (6_4) de M est indéfini, que jamais on n'a, à partir d'un certain terme, $c_i = E(\zeta)$, quel que soit i : *il y a une infinité de coefficients c_j au plus égaux à $E(\zeta) - 1$ (nuls si $\zeta < 2$).*

De même, *si $\zeta - E(\zeta) < \zeta^{-1}$ (exemple $\zeta = \sqrt{2}$), il y a dans (6_4) une infinité de couples de coefficients consécutifs c_j, c_{j+1} tous deux au plus égaux à $E(\zeta) - 1$ (nuls si $\zeta < 2$)*, sans quoi, à partir d'un certain terme c_i, on aurait une somme de termes au moins égale à

$$\zeta^{-i}E(\zeta)(1 + \zeta^{-2} + \zeta^{-4} + \ldots) = \zeta^{-i}E(\zeta)(1 - \zeta^{-2})^{-1} > \zeta^{-i+1}.$$

On peut encore trouver une limite supérieure du nombre des coefficients c_i consécutifs qui peuvent être égaux à $E(\zeta)$. Soit

$$c_i = c_{i+1} = \ldots = c_{i+j} = E(\zeta);$$

il faut

$$c_i\zeta^{-i} + \ldots + c_{i+j}\zeta^{-(i+j)} = E(\zeta)\zeta^{-i}\frac{1 - \zeta^{-j-1}}{1 - \zeta^{-1}} < \zeta^{1-i},$$

ou

$$1 - \zeta^{-1-j} < \frac{\zeta - 1}{E(\zeta)}, \qquad \zeta^{-1-j} > 1 - \frac{\zeta - 1}{E(\zeta)} = \frac{1 + E(\zeta) - \zeta}{E(\zeta)},$$

$$\zeta^{j+1} < \frac{E(\zeta)}{1 + E(\zeta) - \zeta}.$$

la représentation, évidemment non canonique, de l'unité qui résulte de (1_4); on pourra dire aussi que

$$(8_4) \qquad 0 = 1 - c'_1\zeta^{-1} - c'_2\zeta^{-2} - \ldots - c'_n\zeta^{-n} - \ldots$$

est une représentation de zéro; l'on peut ajouter aux deux membres de (6_4) le produit des deux membres de (8_4) multipliés par un nombre quelconque M' mis sous la forme (6_4), et l'on aura une infinité

Quand $\zeta = \sqrt{2}$, $\zeta^{j+1} < \frac{1}{2-\sqrt{2}} < 2$, $j = 0$, et, puisque $E(\zeta) = 1$, on voit qu'un des coefficients sur deux au moins est nul. La même circonstance se présentera quand $1 < \zeta < 2$, ζ quelconque, et $\zeta^2 > (2-\zeta)^{-1}$, $2\zeta^2 - \zeta^3 > 1$, $\zeta^3 - 2\zeta^2 + 1 < 0$; or

$$\zeta^3 - 2\zeta^2 + 1 = \zeta^3 - \zeta^2 - (\zeta^2 - 1) = (\zeta - 1)(\zeta^2 - \zeta - 1);$$

il suffit

$$\zeta^2 - \zeta - 1 < 0,$$

$$\zeta < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1,618\ldots.$$

Donc :

Quand $1 < \zeta < \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$, *dans un développement canonique de la forme* (6_4), *sur deux coefficients consécutifs, l'un au moins est nul, l'autre pouvant être égal à l'unité ou nul; exemples :* $\zeta = \frac{e}{2}$ ou $\zeta = \frac{\pi}{2}$.

Je prends encore $\zeta = e = 2,718\ldots$ (base des logarithmes népériens);

$$e^{j+1} < \frac{2}{3-e} < \frac{2}{0,28} = 7,14\ldots, \qquad j = 0.$$

Quand $\zeta = e$, *sur deux coefficients consécutifs de* (6_4), *un est égal à* 1 *ou* 0.

Enfin, quand $\zeta = \pi = 3,141\ldots$

$$\pi^{j+1} < \frac{3}{4-\pi} < \frac{3}{0,85} < 4, \qquad j = 0.$$

Il y a parfois encore d'autres règles analogues; ainsi, quand $c_i = E(\zeta)$,

$$c_i\zeta^{-i} + c_{i+1}\zeta^{-i-1} < \zeta^{-i+1}, \qquad E(\zeta) + c_{i+1}\zeta^{-1} < \zeta, \qquad c_{i+1} < [\zeta - E(\zeta)]\zeta,$$

et c_{i+1} sera nul si $\zeta[\zeta - E(\zeta)] \leqq 1$. Cette dernière condition étant supposée réalisée, il faudra $c_i\zeta^{-i} + c_{i+2}\zeta^{-i-2} < \zeta^{-i+1}$, $c_{i+2} < \zeta^2[\zeta - E(\zeta)]$: et ainsi de suite. Prenant en particulier $\zeta = \pi$, $c_i = 3$, on obtient $c_{i+1} = 0$, $c_{i+2} \leqq 1$. Donc :

Quand $\zeta = \pi$, *si un coefficient* $c_i = E(\zeta) = 3$, *le suivant* c_{i+1} *est nul, et* $c_{i+2} \leqq 1$.

de représentations de M, analogues à (6_1), mais où les coefficients a_i, c_j ne satisfont plus en général à la condition d'être $< \zeta$.

Quand ζ est < 1, on pose $\zeta^{-1} = \zeta'$, et l'on opère sur ζ' comme on vient de le faire sur ζ.

2° *Nombres transcendants quelconques.* — Ces procédés peuvent aussi s'étendre aux cas où, soit la base ζ, soit le nombre M, à représenter, est imaginaire. Je dirai dans ce qui suit que $f + gi$ est un entier imaginaire si f et g sont entiers, positifs ou négatifs.

Je détermine d'abord l'entier c_0 par la condition

$$0 \leqq |M - c_0| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2};$$

si

$$M = \mu + \nu i, \qquad c_0 = f_0 + g_0 i,$$

il faut et il suffit

$$0 \leqq (\mu - f_0)^2 + (\nu - g_0)^2 \leqq \frac{1}{2},$$

ce qui peut toujours se faire en prenant pour f_0 et g_0 les entiers, positifs ou négatifs, les plus voisins de μ et ν; cela donne

$$|\mu - f_0| \leqq \frac{1}{2}, \qquad |\nu - g_0| \leqq \frac{1}{2}, \qquad 0 \leqq (\mu - f_0)^2 + (\nu - g_0)^2 \leqq \frac{1}{2},$$
$$0 \leqq |M - c_0| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si M est entier, réel ou imaginaire, on obtient $M = c_0$; pour avoir alors une représentation de M, on en cherchera une de $\frac{M}{q}$, où q, entier réel, ne divise pas à la fois μ et ν.

Je suppose maintenant que le module Z de ζ^{-1} soit plus grand que 1. J'écris

$$\varepsilon_0 = M - c_0 = (c_1 + \varepsilon_1)\zeta, \qquad c_1 = f_1 + g_1 i, \qquad \zeta^{-1} = a + bi,$$
$$Z^2 = a^2 + b^2 > 1, \qquad 0 \leqq |M - c_0| = |\varepsilon_0| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$(M - c_0)\zeta^{-1}$ est de la forme $f'_1 + g'_1 i$; si f_1, g_1 sont les entiers les plus voisins de f'_1, g'_1

$$(f'_1 - f_1)^2 + (g'_1 - g_1)^2 \leqq \frac{1}{2};$$

d'après $c_1 = f_1 + g_1 i$, on a

$$(M - c_0)\zeta^{-1} = c_1 + \varepsilon_1. \qquad |c_1|^2 = f_1^2 + g_1^2 \leqq \left(|f'_1| + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(|g'_1| + \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\varepsilon_1 = f'_1 - f_1 + (g'_1 - g_1)i, \qquad |\varepsilon_1| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

J'opère alors sur ε_1 comme je viens de le faire sur $\varepsilon_0 = M - c_0$; je pose

$$\varepsilon_1 = (c_2 + \varepsilon_2)\zeta, \qquad c_2 = f_2 + g_2 i, \qquad |\varepsilon_1| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a

$$\varepsilon_1 \zeta^{-1} = c_2 + \varepsilon_2 = f'_2 + g'_2 i, \qquad |c_2|^2 = f_2^2 + g_2^2 \leqq \left(|f'_2| + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(|g'_2| + \frac{1}{2}\right)^2$$

où f_2, g_2 sont les entiers les plus voisins de f'_2 et g'_2; et ainsi de suite.

On a ici

$$\sqrt{f_1'^2 + g_1'^2} = |\varepsilon_0 \zeta^{-1}| \leqq \frac{Z\sqrt{2}}{2}, \qquad |\varepsilon_1| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$|c_1|^2 \leqq f_1'^2 + g_1'^2 + \frac{1}{2} + |f'_1| + |g'_1| \leqq \frac{Z^2}{2} + \frac{1}{2} + |f'_1| + |g'_1|;$$

or la plus grande valeur de

$$(|f'_1| + |g'_1|)^2 = f_1'^2 + g_1'^2 + 2|f'_1 g'_1|,$$

pour une valeur donnée de $f_1'^2 + g_1'^2$, ayant lieu pour $f_1'^2 g_1'^2$ maximum, est réalisée pour $|f'_1| = |g'_1|$; quand $f_1'^2 + g_1'^2 \leqq \frac{Z^2}{2}$, la plus grande valeur de $|f'_1| + |g'_1|$ a donc lieu pour $f_1'^2 = g_1'^2 = \frac{Z^2}{4}$. Donc

$$|c_1|^2 \leqq \frac{Z^2}{2} + \frac{1}{2} + Z = \frac{1}{2}(Z+1)^2, \qquad |c_1| \leqq \frac{Z+1}{\sqrt{2}}.$$

Le même raisonnement s'applique quand on remplace les indices 0, 1 par les indices 1, 2, et

$$\sqrt{f_2'^2 + g_2'^2} = |\varepsilon_1 \zeta^{-1}| \leqq \frac{Z\sqrt{2}}{2}, \qquad |c_2|^2 \leqq f_2'^2 + g_2'^2 + \frac{1}{2} + |f'_2| + |g'_2|,$$

$$|c_2| \leqq \frac{Z+1}{\sqrt{2}};$$

le raisonnement se continuant évidemment, puisque les quantités ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, ... satisfont à la même inégalité $|\varepsilon_j| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a en général

$$|c_j| \leqq \frac{Z+1}{\sqrt{2}};$$

on obtient ce résultat :

Théorème I₄. — *Tout nombre* M *peut se mettre sous la forme*

$$M = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots + c_n\zeta^n + \ldots,$$

où ζ *est un nombre arbitraire donné, réel ou imaginaire,* $|\zeta| < 1$, $|M - c_0| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$, *et* $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ *sont des entiers réels ou imaginaires dont les modules, sauf celui de* c_0, *sont au plus égaux à* $\frac{|\zeta^{-1}|+1}{\sqrt{2}}$.

On pourrait aussi choisir autrement $f_0, g_0, f_1, g_1, \ldots$; ainsi on pourrait prendre pour f_j et g_j les entiers immédiatement inférieurs ou égaux à f'_j et g'_j. C'est ce qui a été fait dans le cas où M est réel et ζ réel et positif [formule (1₄) et suivantes]; je ne m'y attarderai pas.

Le théorème précédent comporte diverses conséquences : ainsi, je prends $M = \frac{1}{2}$; j'en déduis

$$1 = 2c_1\zeta + 2c_2\zeta^2 + \ldots + 2c_n\zeta^n + \ldots;$$

donc :

Corollaire I₄. — *Tout nombre algébrique ou transcendant* ζ, *réel ou non, est racine d'une équation*

(3₄) $$1 = 2c_1\zeta + 2c_2\zeta^2 + \ldots + 2c_n\zeta^n + \ldots,$$

quand $|\zeta|^{-1} = Z > 1$, *et d'une équation*

(4₄) $$1 = 2c_1\zeta^{-1} + 2c_2\zeta^{-2} + \ldots + 2c_n\zeta^{-n} + \ldots,$$

quand $|\zeta| = Z_1 > 1$, c_n *étant un entier réel ou imaginaire, de module respectivement* $\geqq \frac{Z-1}{\sqrt{2}}$ *ou* $\frac{Z_1-1}{\sqrt{2}}$.

On pourrait aussi arriver à un corollaire analogue en prenant $M = \zeta^{-1}$, quand $|\zeta| < 1$, d'où

$$\zeta^{-1} = c'_0 + c'_1\zeta + \ldots + c'_n\zeta^n + \ldots,$$
$$1 = c'_0\zeta + c'_1\zeta^2 + \ldots + c'_n\zeta^{n+1} + \ldots.$$

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ les nombres conjugués de $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, c'est-à-dire que, si $c_n = f_n + g_n i$, $\gamma_n = f_n - g_n i$. Soit encore $Z = |\zeta|^{-1} > 1$, ζ' le nombre conjugué de ζ.

D'après $(3'_4)$ ζ est racine de

$$f(z) = 1 - 2c_1 z - 2c_2 z^2 - \ldots - 2c_n z^n - \ldots = 1 + Pz + iQz,$$

ζ' est racine de

$$\varphi(z) = 1 - 2\gamma_1 z - 2\gamma_2 z^2 - \ldots - 2\gamma_n z^n - \ldots = 1 + Pz - iQz,$$

où P et Q sont des séries en z à coefficients entiers réels; leur rayon de convergence est $> Z^{-1}$. Je forme

$$F(z) = f\varphi = (1 + Pz)^2 + Q^2 z^2.$$

$F(z)$ est alors une série ordonnée suivant les puissances croissantes de z, dont le premier coefficient est l'unité, les autres étant entiers réels. On en conclut donc :

Corollaire II_4. — *Tout nombre algébrique ou transcendant ζ, réel ou non, est racine d'une équation*

$$(3''_4) \qquad 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = 0,$$

quand $|\zeta| < 1$, *et d'une équation*

$$(4''_4) \qquad 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n} + \ldots = 0,$$

quand $|\zeta| > 1$, *les a_n étant des entiers réels, positifs ou négatifs.*

Ce résultat n'était pas évident *a priori.*

Remarque. — J'envisage la représentation de M, quand elle est possible, sous la forme la plus générale suivante, canonique ou non,

$$M\zeta^{-m} = \gamma_0 + \gamma_1\zeta^{-1} + \ldots + \gamma_n\zeta^{-n} + \ldots,$$

où les γ_n sont entiers, réels ou non, ou même rationnels, et ζ est un nombre arbitraire, avec $|\zeta| > 1$, le second membre étant une série convergente, en sorte que $|\gamma_n \zeta^{-n}|$ tend vers o quand n croît indéfiniment.

J'admets que la suite des coefficients γ_n soit périodique, c'est-à-dire que, à partir d'un certain coefficient γ_{p+1}, on a

$$\begin{aligned}\gamma_{p+1} &= \gamma_{p+q+1} = \ldots = \gamma_{p+jq+1} = \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \gamma_{p+q} &= \gamma_{p+2q} = \ldots = \gamma_{p+(j+1)q} = \ldots;\end{aligned}$$

la suite sera périodique simple, si l'on peut prendre $p = 0$; périodique mixte, si l'on doit prendre $p > 0$. Dans les deux cas, les coefficients γ_j ont tous leurs modules limités supérieurement. On aura

$$\begin{aligned}M\zeta^{-m} &= \gamma_0 + \gamma_1\zeta^{-1} + \ldots + \gamma_p\zeta^{-p}\\ &+ \zeta^{-p-1}(\gamma_{p+1} + \gamma_{p+2}\zeta^{-1} + \ldots + \gamma_{p+q}\zeta^{-q+1})(1 + \zeta^{-q} + \zeta^{-2q} + \ldots),\end{aligned}$$

$$(a_4)\qquad \begin{aligned}M\zeta^{-m} &= \gamma_0 + \gamma_1\zeta^{-1} + \ldots + \gamma_p\zeta^{-p}\\ &+ \frac{\zeta^{-p-1}}{1 - \zeta^{-q}}(\gamma_{p+1} + \gamma_{p+2}\zeta^{-1} + \ldots + \gamma_{p+q}\zeta^{-q+1});\end{aligned}$$

il existe une relation algébrique à coefficients rationnels entre M et ζ^{-1}. Si M est un nombre rationnel ou algébrique, ζ^{-1} et ζ sont des nombres algébriques.

On arrive évidemment à la même conclusion, quand $|\zeta|$ est plus petit que 1, pour la représentation

$$M\zeta^{m} = \gamma_0 + \gamma_1\zeta + \ldots + \gamma_n\zeta^n + \ldots.$$

Il y a réciprocité, au moins quand M est un nombre rationnel : soit ζ un nombre algébrique, avec $|\zeta| > 1$, dont l'inverse ζ^{-1} satisfait à l'équation

$$(b_4)\qquad (\gamma_q + M)\zeta^{-q} + \gamma_{q-1}\zeta^{-q+1} + \ldots + \gamma_1\zeta^{-1} = M,$$

où M et les γ sont rationnels; l'équation dont ζ^{-1} est racine peut, en effet, être mise sous cette forme; on a

$$(c_4)\qquad \begin{aligned}M &= \frac{\gamma_q\zeta^{-q} + \gamma_{q-1}\zeta^{-q+1} + \ldots + \gamma_1\zeta^{-1}}{1 - \zeta^{-q}}\\ &= (\gamma_1\zeta^{-1} + \ldots + \gamma_q\zeta^{-q})(1 + \zeta^{-q} + \zeta^{-2q} + \ldots),\end{aligned}$$

et l'on obtient pour M une représentation périodique simple. Donc, le nombre rationnel M étant évidemment arbitraire :

Tout nombre algébrique de module > 1 peut être caractérise par ce fait que tout nombre rationnel, réel ou non, admet une représentation infinie périodique à coefficients rationnels à l'aide de ce nombre. Pour un nombre transcendant, il n'y a aucun nombre rationnel admettant une représentation infinie périodique ou finie à coefficients rationnels à l'aide de ce nombre (¹).

On a une propriété corrélative quand $|\zeta| < 1$.

Séries infinies à coefficients rationnels.

1° *Nombres transcendants réels.* — Je procède encore comme à l'occasion de la formule (1_4), en supposant $0 < \zeta_1 < 1$, M et ζ_1 réels; mais au lieu de prendre dans

$$\varepsilon_{i-1} = (c_i + \varepsilon_i)\zeta_1 < 1,$$

pour c_i le plus grand entier ordinaire contenu dans $\varepsilon_{i-1}\zeta_1^{-1}$, je prends pour c_i la fraction rationnelle ordinaire la plus approchée par défaut de $\varepsilon_{i-1}\zeta_1^{-1}$, et dont le dénominateur est φ_i, φ_i étant un entier ordinaire fonction de i, avec $\lim \varphi_i = \infty$ pour $i = \infty$ (²), et $c_i = \dfrac{d_i}{\varphi_i}$; $\dfrac{d_i}{\varphi_i}$ sera toujours au moins égal à ce plus grand entier, souvent plus grand, et l'on aura $\varepsilon_i < \varphi_i^{-1}$,

$$\varepsilon_i\zeta_1^{-1} = \frac{d_{i+1}}{\varphi_{i+1}} + \varepsilon_{i+1}, \qquad d_{i+1} + \varepsilon_{i+1}\varphi_{i+1} = \varepsilon_i\zeta_1^{-1}\varphi_{i+1}, \qquad \varepsilon_{i+1}\varphi_{i+1} < 1,$$
$$d_{i+1} = \mathrm{E}(\varepsilon_i\zeta_1^{-1}\varphi_{i+1}) < \varphi_{i+1}\zeta_1^{-1}\varphi_i^{-1},$$

(¹) Dans le cas où $M = 1$, $m = \gamma_0 = 0$, le coefficient de la plus haute puissance de ζ dans l'équation algébrique (a_4) est l'unité; si les γ_j sont entiers, par définition, ζ est un entier algébrique. Dans le cas où $m = \gamma_0 = 0$, M quelconque, ζ ne peut être un entier algébrique dans (a_4) que si les γ_j sont tous de la forme $M\delta_j$, où les δ_j sont entiers.

Inversement, si ζ est entier algébrique, on peut prendre $M = 1$ dans (b_4), les γ_j étant entiers, et (c_4) donne pour l'unité une représentation périodique à coefficients entiers.

(²) On pourrait aussi étudier le cas où φ_i reste fini : je n'insiste pas; quand $\varphi_i = 1$, on obtient la formule (1_4).

E(x) désignant le plus grand entier contenu dans x. On arrive ainsi au développement

$$(1_4\ bis)\qquad M = \frac{d_0}{\varphi_0} + \frac{d_1\zeta_1}{\varphi_1} + \ldots + \frac{d_i\zeta_1^i}{\varphi_i} + \ldots \quad (^1).$$

En particulier, pour $\varepsilon_0 = M - \frac{d_0}{\varphi_0} = 1$, on obtient ce résultat :

φ_i étant un entier ordinaire avec $\lim \varphi_i = \infty$ pour $i = \infty$, tout nombre algébrique ou transcendant réel positif est racine d'une équation

$$(3_4\ bis)\qquad 1 = \frac{d_1}{\varphi_1}\zeta_1 + \ldots + \frac{d_n}{\varphi_n}\zeta_1^n + \ldots,$$

quand $\zeta_1 < 1$, et d'une équation

$$(4_4\ bis)\qquad 1 = \frac{d_1}{\varphi_1}\zeta_1^{-1} + \ldots + \frac{d_n}{\varphi_n}\zeta_1^{-n} + \ldots,$$

quand $\zeta_1 > 1$, d_{i+1} étant un entier positif ordinaire $< \varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}\zeta_1^{-1}$ ou $\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}\zeta_1$ respectivement ($\varphi_0 = 1$, $d_1 \leqq \varphi_1\zeta_1^{-1}$ ou $d_1 \leqq \varphi_1\zeta_1$).

On remarquera, quand $\zeta_1 < 1$, que

$$(8_4\ bis)\qquad \frac{d_{i+1}}{\varphi_{i+1}}\zeta_1^{i+1} < \zeta_1^i\varphi_i^{-1}, \qquad d_{i+1}\varphi_{i+1}^{-1} < \zeta_1^{-1}\varphi_i^{-1}.$$

La série $\sum\limits_1^\infty d_{i+1}\varphi_{i+1}^{-1}\zeta_1^{i+1}$ a tous ses termes plus petits que ceux de la série $\sum\limits_1^\infty \zeta_1^i\varphi_i^{-1}$. Or, si le rapport $\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}$ croît constamment et indéfiniment avec i, $\sum\limits_1^\infty \zeta_1^i\varphi_i^{-1}$ est une fonction entière (²). Il en sera de

---

(¹) Je reviens plus loin (Chap. V) sur cette formule.

(²) C'est-à-dire une série qui converge quelle que soit la valeur de la variable. Ici, en effet, le rapport $x\varphi_i\varphi_{i+1}^{-1}$ d'un terme au précédent tend vers o quel que soit x.

Dans ce cas, $d_i\varphi_i^{-1}$ tend vers o, et l'on n'a jamais une suite périodique de coefficients $d_i\varphi_i^{-1}$.

même alors de $\sum_1^\infty d_{i+1}\varphi_{i+1}^{-1}\zeta_1^{i+1}$. Cette dernière propriété a d'ailleurs lieu plus généralement à la seule condition que $\sum_1^\infty \zeta_1^i \varphi_i^{-1}$ soit une fonction entière. On en conclut ce théorème, que je crois important :

Théorème II$_4$. — *Soit φ_i un entier ordinaire tel que $\sum_1^\infty x^i\varphi_i^{-1}$ soit une fonction entière de x : tout nombre algébrique ou transcendant réel positif $\zeta_1 < 1$* (¹) *est racine d'une équation de la forme*

$$(9_4)\qquad 0 = -1 + d_1\varphi_1^{-1}\zeta_1 + \ldots + d_i\varphi_i^{-1}\zeta_1^i + \ldots = f(\zeta_1)$$

(où $0 \leqq d_{i+1} < \varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}\zeta_1^{-1}$, d_{i+1} entier positif, $d_1 \leqq \varphi_1\zeta_1^{-1}$), dont le second membre est une fonction entière de ζ_1. C'est en particulier le cas quand $\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}$ croît constamment et indéfiniment avec i.

En même temps, tout nombre réel positif est représentable sous la forme (1_4 *bis*) (²).

Si je prends en particulier $\varphi_i = i!$,

$$(10_4)\qquad f(\zeta_1) = -1 + \frac{d_1\zeta_1}{1} + \ldots + \frac{d_i\zeta_1^i}{i!} + \ldots = 0,$$

où $d_{i+1} < (i+1)\zeta_1^{-1}$.

Si je prends $\varphi_i = b_k(i)^{\rho i}$, b, k, ρ entiers,

$$b_1(i) = b^i, \qquad b_2(i) = b^{b_1(i)}, \qquad \ldots, \qquad b_k(i) = b^{b_{k-1}(i)}, \qquad \ldots$$

[comparer formule (14), Chapitre I, où b est remplacé par e],

$$(11_4)\qquad f(\zeta_1) = -1 + \frac{d_1\zeta_1}{b_k(1)^\rho} + \ldots + \frac{d_i\zeta_1^i}{b_k(i)^{\rho i}} + \ldots = 0,$$

où $d_{i+1} < b_k(i+1)^{\rho(i+1)}b_k(i)^{-\rho i}\zeta_1^{-1}$.

(¹) On soupçonne de suite que cette restriction n'est pas nécessaire; on va le voir tout à l'heure.

(²) On obtient une représentation des nombres négatifs $-M'$, avec $M' > 0$, en prenant la représentation de M', ou encore choisissant A rationnel de façon que $A - M' > 0$ et cherchant la représentation de $A - M'$. Dans le cas où ζ_1 serait négatif, on poserait $\zeta_1 = -\zeta_1'$.

Enfin, si je prends $\varphi_i = b_i(i)$,

$$(12_4) \qquad f(\zeta_1) = -1 + \frac{d_1\zeta_1}{b_1(1)^\rho} + \ldots + \frac{d_i\zeta^i}{b_i(i)^{\rho i}} + \ldots = 0,$$

où $d_{i+1} < b_{i+1}(i+1)^{\rho(i+1)} b_i(i)^{-\rho i}\zeta_1^{-1}$.

Remarque I. — On a supposé dans (3_4 *bis*) et (9_4) à (12_4) $\zeta_1 < 1$; mais un procédé analogue conduit à des formules semblables quand $\zeta_1 \geqq 1$. Le raisonnement fait à propos de (1_4 *bis*), p. 68, est en général suffisant, d'après $d_{i+1} < \varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}\zeta_1^{-1}$, dès que, pour une infinité de valeurs de i, $\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}\zeta_1^{-1} \geqq 1$.

On peut préciser, si l'on veut, ainsi qu'il suit : on écrira, quand $\zeta_1 \geqq 1$,

$$\varepsilon_i\zeta_1^{-1} = d_{i+1}\varphi_{i+1}^{-1} + \varepsilon_{i+1}, \qquad \varepsilon_{i+1} < \varphi_{i+1}^{-1},$$

pourvu que l'on prenne $d_{i+1} = 0$, si

$$\varepsilon_i\zeta_1^{-1} < \varphi_{i+1}^{-1},$$

d'où

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i\zeta_1^{-1}.$$

De même

$$\varepsilon_{i+1}\zeta_1^{-1} = d_{i+2}\varphi_{i+2}^{-1} + \varepsilon_{i+2},$$

avec $d_{i+2} = 0$ si

$$\varepsilon_{i+1}\zeta_1^{-1} = \varepsilon_i\zeta_1^{-2} < \varphi_{i+2}^{-1}, \qquad \ldots.$$

Il suffira que l'on n'ait pas constamment

$$\varepsilon_0\zeta_1^{-1} < \varphi_1^{-1}, \qquad \varepsilon_1\zeta_1^{-1} < \varphi_2^{-1}, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_i\zeta_1^{-1} < \varphi_{i+1}^{-1}, \qquad \ldots$$

pour que l'on puisse poser, quand i a une certaine valeur j,

$$\varepsilon_j\zeta_1^{-1} = \varepsilon_0\zeta_1^{-j-1} = d_{j+1}\varphi_{j+1}^{-1} + \varepsilon_{j+1}, \qquad d_{j+1} \text{ entier } > 0,$$
$$\varepsilon_{j+1} < \varphi_{j+1}^{-1}, \qquad d_{j+1} \leqq \varepsilon_0\zeta^{-j-1}\varphi_{j+1},$$

et

$$d_{j+1} \leqq \varepsilon_j\zeta_1^{-1}\varphi_{j+1} < \varphi_{j+1}\varphi_j^{-1}\zeta_1^{-1},$$

puisque

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{j-1}\zeta_1^{-1} < \varphi_j^{-1}.$$

Si l'on n'a pas ensuite constamment

$$\varepsilon_{j+1}\zeta_1^{-1} < \varphi_{j+2}^{-1}, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_{j+i_1}\zeta_1^{-1} = \varepsilon_{j+1}\zeta_1^{-i_1} < \varphi_{j+i_1+1}^{-1}, \qquad \ldots,$$

pour une certaine valeur j_1 de i_1, on pourra poser

$$\varepsilon_{j+j_1}\zeta_1^{-1} = \varepsilon_{j+1}\zeta_1^{-j_1} = d_{j+j_1+1}\varphi_{j+j_1+1}^{-1} + \varepsilon_{j+j_1+1},$$
$$d_{j+j_1+1} \text{ entier} > 0, \qquad \varepsilon_{j+j_1+1} < \varphi_{j+j_1+1}^{-1},$$
$$d_{j+j_1+1} \leqq \varepsilon_{j+1}\zeta_1^{-j_1}\varphi_{j+j_1+1} < \zeta_1^{-j_1}\varphi_{j+j_1+1}\varphi_{j+1}^{-1},$$
$$d_{j+j_1+1} < \varepsilon_{j+j_1}\zeta_1^{-1}\varphi_{j+j_1+1} < \varphi_{j+j_1+1}\varphi_{j+j_1}^{-1}\zeta_1^{-1};$$

et ainsi de suite. On obtiendra

$$(1_4\ ter) \qquad M = d_0\varphi_0^{-1} + d_{j+1}\varphi_{j+1}^{-1}\zeta_1^{j+1} + d_{j+j_1+1}\varphi_{j+j_1+1}^{-1}\zeta_1^{j+j_1+1} + \ldots.$$

Il est bien évident toutefois ici que φ_i est assujetti à une certaine condition de rapidité de croissance, puisque $\zeta_1 \geqq 1$. Je suppose en particulier que $\lim \varphi_i a^{-i} = \infty$ pour $i = \infty$, quelle que soit la quantité fixe a. La quantité $\varphi_{i+1}\zeta_1^{-i-1}$ est dans le même cas, et il y aura, M étant donné, une certaine valeur j de i telle que, si

$$\varepsilon_{j-1}\zeta_1^{-1} = \varepsilon_0\zeta_1^{-j} < \varphi_j^{-1},$$

on ait

$$\varepsilon_j\zeta_1^{-1} = \varepsilon_0\zeta_1^{-j-1} \geqq \varphi_{j+1}^{-1};$$

de même, $\lim \zeta_1^{-i_1}\varphi_{j+i_1+1} = \infty$ pour $i_1 = \infty$, et il y aura une valeur j_1 de i_1 telle que

$$\varepsilon_{j+1}\zeta_1^{-j_1} = \varepsilon_{j+j_1}\zeta_1^{-1} \geqq \varphi_{j+j_1+1}^{-1};$$

et ainsi de suite. On arrivera alors pour tout nombre M à un développement de la forme (1_4 *ter*). Cette série est évidemment convergente, car $\varepsilon_i\zeta_1^i$ tend vers zéro quand i croît indéfiniment. On a, par exemple,

$$d_{j+j_1+1} < \zeta_1^{-j_1}\varphi_{j+j_1+1}\varphi_{j+1}^{-1}, \qquad d_{j+j_1+1} < \varphi_{j+j_1+1}\varphi_{j+j_1}^{-1}\zeta_1^{-1},$$

et la série (1_4 *ter*) a tous ses termes, en négligeant au besoin le premier, plus petits que ceux de la série

$$\sum \zeta_1^{j+1}\varphi_{j+1}^{-1}.$$

Ici, $\lim (2\zeta_1)^{j+1}\varphi_{j+1}^{-1} = 0$ pour $j = \infty$, d'après l'hypothèse [1] faite

[1] D'après cela, si, quel que soit le nombre fixe a, $\lim \varphi_i a^{-i} = \infty$ pour $i = \infty$, $\sum x^i \varphi_i^{-1}$ est une fonction entière. Inversement, si cette série est une fonction entière, le terme général tend vers o, quelle que soit la valeur donnée à x, c'est-à-dire que $\lim \varphi_i a^{-i} = \infty$ pour $i = \infty$.

sur ρ_i, et cette série est convergente quel que soit ζ_1, c'est-à-dire que c'est une fonction entière de ζ_1. Donc la série (1_4 *ter*), où ζ_1 est regardé comme une variable, est fonction entière de ζ_1. Par suite :

Corollaire. — *Le théorème* II_4 *et les formules* (10_4) *à* (12_4) *subsistent quand* ζ_1 *est* $\geqq 1$.

En changeant ζ_1 en $-\zeta_1$ on obtient des résultats similaires pour les nombres réels négatifs [1].

Remarque II. — Il résulte de là [2] et, par exemple, des formules (9_4) à (12_4), que l'on étudiera tous les nombres transcendants réels en étudiant tous les nombres qui sont racines des équations (9_4), (10_4), (11_4) ou (12_4). Les formes (11_4), et surtout (12_4), où les séries sont très rapidement convergentes, sont particulièrement avantageuses, car on les manie beaucoup plus facilement que les séries (10_4) par exemple. Ainsi, dans le cas de (12_4), on a sans peine, dans des cas

---

(1) On voit, avec la terminologie de M. Cantor (*Théorie des ensembles*), que les fonctions entières $f(x)$ à coefficients rationnels, dont un nombre donné réel, algébrique ou transcendant, est racine, forment un ensemble ayant la puissance du continu. Ceci est de plus évident *a priori* pour un nombre rationnel a, car, en multipliant la série $f(x)$ par $x - a$, on obtient une série ayant a pour racine. On le verrait de même *a priori* pour un nombre algébrique.

(2) Les limites fixées pour d_{i-1} permettent de définir une catégorie de séries ayant pour racines tous les nombres réels de valeur absolue $\geqq Z$, Z étant un nombre positif choisi arbitrairement.

Les lecteurs au courant de la terminologie des fonctions entières (Note I à la fin du Volume) voient que (10_4), (11_4), (12_4) sont des fonctions entières d'ordre 1, d'ordre 0 et d'indice k, ou d'ordre 0 et d'indice infini, d'une forme spéciale; c'est-à-dire que, par exemple, il y a d'autres fonctions d'ordre 1 que les fonctions (10_4). Ceci prouve que l'on peut définir tous les nombres transcendants réels comme racines de fonctions entières à coefficients rationnels, ou même, d'après (3_4), quand $\zeta_1 < 1$, de séries non entières à coefficients entiers, d'une infinité de manières. En particulier, d'après (12_4), où $f(\zeta)$ est ce que j'ai appelé une *fonction quasi-algébrique* à cause de ses analogies avec les polynomes, on voit que *les racines des fonctions quasi-algébriques comprennent tous les nombres transcendants réels.*

En supprimant dans les dénominateurs de (11_4) et (12_4) les exposants ρ, ..., ρi, $\rho(i-1)$, ..., on obtient un mode de représentation analogue.

Enfin, on peut montrer que, parmi les fonctions $f(\zeta)$, il y en a qui ont une infinité de coefficients $d_i = 0$, même si ζ_1 n'est pas transcendant, par exemple quand ζ_1 est un nombre rationnel.

étendus, comme je l'ai montré ailleurs, une valeur approchée des racines de $f(x)$ et un certain nombre de leurs propriétés.

Ces résultats paraissent dignes d'intérêt. On sait que l'étude des nombres algébriques, c'est-à-dire des nombres racines des équations algébriques à coefficients rationnels, se ramène à celle des racines d'une catégorie spéciale de ces équations, à savoir de celles qui sont irréductibles. On voit dès lors que, si l'on veut essayer d'opérer dans la théorie des nombres transcendants et des équations transcendantes une simplification analogue, supposée possible, on aura sans doute à choisir une catégorie très spéciale d'équations transcendantes jouant un rôle analogue à celui des équations irréductibles. Je reviendrai plus loin sur ce point (Chap. XII).

Remarque III. — La plupart des séries considérées dans ce Chapitre ont leurs coefficients de même signe; mais rien n'empêcherait de prendre des séries à termes positifs ou négatifs, le signe du $n^{\text{ième}}$ terme étant fixé *a priori*.

Je procède par exemple comme à propos de (1_4 *bis*), p. 68, et je

---

En effet, je reprends la formule (3_4 *bis*) de la page 68, où je suppose $\zeta_1 = qp^{-1} < 1$, q, p entiers premiers entre eux, les φ_j étant tous premiers à q; on a

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_0 \zeta_1^{-1} = pq^{-1} = d_1 \varphi_1^{-1} + \varepsilon_1, \quad \dots, \quad \varepsilon_i pq^{-1} = d_{i+1} \varphi_{i+1}^{-1} + \varepsilon_{i+1}, \quad \dots$$

S'il n'y a qu'un nombre limité des d_j qui soient $\neq 0$, on devra avoir, pour une valeur de i,

$$\varepsilon_{i+1} = 0,$$

d'où

$$\varepsilon_i = d_{i+1} q \varphi_{i+1}^{-1} p^{-1}, \quad \varepsilon_{i-1} pq^{-1} = d_i \varphi_i^{-1} + d_{i+1} q \varphi_{i+1}^{-1} p^{-1}.$$

Le deuxième membre est une fraction qui n'a pas q au dénominateur; donc ε_{i-1} est une fraction irréductible dont le numérateur est divisible par q, comme ε_i; et ainsi de suite : ε_1 est une fraction irréductible dont le numérateur est divisible par q; on aurait

$$pq^{-1} = d_1 \varphi_1^{-1} + \varepsilon_1,$$

et le second membre serait une fraction irréductible dont le dénominateur est premier à q, résultat absurde. Donc :

Quand ζ_1 est rationnel, réel et positif, et égal à $qp^{-1} < 1$, q premier aux φ_i, le développement (3_4 bis) est indéfini.

On voit de suite qu'il en est de même quand un des facteurs premiers de q ne divise aucun des φ_i.

pose, ζ_1 étant positif < 1,

$$\varepsilon_i \zeta_1^{-1} = d'_{i+1} \varphi_{i+1}^{-1} - \varepsilon'_{i+1}, \quad \varepsilon'_{i+1} \text{ positif}, \quad d'_{i+1} \text{ entier},$$
$$d'_{i+1} - \varepsilon'_{i+1} \varphi_{i+1} = \varepsilon_i \zeta_1^{-1} \varphi_{i+1}, \quad \varepsilon'_{i+1} \varphi_{i+1} < 1, \quad \varepsilon_i \zeta_1^{-1} \varphi_{i+1} + 1 > d'_{i+1} \geqq \varepsilon_i \zeta_1^{-1} \varphi_{i+1},$$

d'où

$$d'_{i+1} < \varphi_{i+1} \zeta_1^{-1} \varphi_i^{-1} + 1.$$

On peut opérer de même sur ε'_{i+1}, de façon à avoir au choix

$$\varepsilon'_{i+1} \zeta_1^{-1} = d_{i+2} \varphi_{i+2}^{-1} \pm \varepsilon'_{i+2}, \qquad \varepsilon'_{i+2} > 0,$$

soit comme on vient de le faire (cas du signe —), soit comme on l'a fait pour (1_4 *bis*) (cas du signe +); et ainsi de suite. On arrive à une formule analogue à (1_4 *bis*) : je n'insiste pas.

Comme types de séries de ce genre, je citerai les séries

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

qui peuvent représenter un nombre quelconque < 1 ; pour $x = n\pi$ ou $\frac{2n+1}{2}\pi$, $\sin x$ ou $\cos x$ est nul, et l'on obtient des équations analogues à (10_4) ayant pour racines les nombres transcendants [1] $n\pi$ ou $\frac{2n+1}{2}\pi$.

2° *Nombres transcendants quelconques.* — Je me bornerai en principe, à propos des autres modes de représentation d'un nombre **M** à l'aide d'un nombre ζ_1 ou des autres catégories d'équations dont ζ_1 est racine que j'indiquerai maintenant dans ce Chapitre, et qui sont analogues à (1_4) et (9_4) par exemple, au cas où ζ_1 est réel.

Mais j'attache assez d'importance aux résultats obtenus ici pour croire utile de montrer que l'on a encore un théorème analogue au théorème II_4 et à son corollaire quand ζ_1 est imaginaire. Je supposerai pour simplifier les φ_i réels.

Je prendrai encore en général, comme à la remarque I,

$$\varepsilon_i \zeta_1^{-1} = d_{i+1} \varphi_{i+1}^{-1} + \varepsilon_{i+1},$$

---

(1) On verra plus loin, au Chapitre IX, que π est transcendant.

c'est-à-dire que je détermine d_{i+1}, de la forme $f_{i+1}+g_{i+1}\sqrt{-1}$, avec f_{i+1}, g_{i+1} entiers, de façon que

$$\varepsilon_i \zeta_1^{-1} \varphi_{i+1} - d_{i+1} = \varepsilon_{i+1} \varphi_{i+1}$$

ait son module aussi petit que possible. Si

$$\varepsilon_i \zeta_1^{-1} \varphi_{i+1} = f'_{i+1} + g'_{i+1} \sqrt{-1},$$

on pourra prendre

$$|f'_{i+1} - f_{i+1}| \leqq \frac{1}{2}, \qquad |g'_{i+1} - g_{i+1}| \leqq \frac{1}{2},$$

d'où

$$\varphi_{i+1} |\varepsilon_{i+1}| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |\varepsilon_{i+1}| \leqq (\varphi_{i+1}\sqrt{2})^{-1},$$

$$|d_{i+1}| \leqq |\varepsilon_i \zeta_1^{-1} \varphi_{i+1}| + \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \frac{\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}}{\sqrt{2}} |\zeta_1^{-1}| + \frac{1}{\sqrt{2}},$$

en admettant qu'on ait déjà établi, par un raisonnement d'ailleurs identique au précédent, que $|\varepsilon_i| \leqq (\varphi_i\sqrt{2})^{-1}$.

Ceci réussira toujours quand $|\zeta_1| < 1$, et aussi, pourvu que $\sum x^i \varphi_i^{-1}$ soit une fonction entière, quand $|\zeta_1| > 1$. Je n'insiste pas.

Théorème III_4. — *Soit φ_i un entier réel fonction de i et tel que $\sum_1^\infty x^i \varphi_i^{-1}$ soit une fonction entière : tout nombre algébrique ou transcendant ζ_1, réel ou non, est racine d'une équation de la forme* (9_4), *où les d_i sont des entiers, réels ou imaginaires, avec*

$$|d_i| \leqq \sqrt{2}\,\varphi_i \varphi_{i-1}^{-1} |\zeta_1^{-1}| + \sqrt{2}.$$

Tout nombre réel ou imaginaire est représentable par une formule analogue à (1_4 *bis*), p. 68, *où les d_i sont des entiers réels ou imaginaires satisfaisant à la condition ci-dessus.*

Soit encore $f(\zeta_1) = 0$ cette équation ([1]), dont ζ_1 est racine; on

([1]) Je suppose ici, aussi bien que dans l'énoncé du théorème III_4, que l'équation $f(\zeta_1) = 0$ a été obtenue en prenant la représentation de $\frac{1}{2}$ à l'aide de ζ_1. *Comparer* formule ($3'_4$), corollaire I_4 du théorème I_4.

aura

$$f(z) = 1 + Pz + \sqrt{-1}\,Qz,$$

où P et Q sont des séries en z à coefficients rationnels réels, les coefficients de z^{n-1} y étant de la forme $\delta_n\varphi_n^{-1}$, $\delta'_n\varphi_n^{-1}$ respectivement avec δ_n, δ'_n entiers.

La quantité conjuguée de ζ_1 est racine de

$$\varphi(z) = 1 + Pz - \sqrt{-1}\,Qz$$

et

$$F(z) = f(z)\varphi(z) = (1 + Pz)^2 + Q^2z^2.$$

ζ_1 est ainsi racine de la série à coefficients rationnels $F(z)$, dont le terme indépendant de z est 1 ; on a

$$1 + Pz = 1 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots,$$
$$Qz = b_1z + b_2z^2 + \ldots + b_nz^n + \ldots.$$

Le terme en z^n dans $F(z)$ a pour coefficient

$$2a_n + 2a_{n-1}a_1 + 2a_{n-2}a_2 + \ldots + 2b_{n-1}b_1 + 2b_{n-2}b_2 + \ldots.$$

C'est une somme de termes de la forme $\delta\varphi_n^{-1}$ et $\delta'\varphi_{n-j}^{-1}\varphi_j^{-1}$, où δ, δ' sont entiers réels, $1 \leqq j \leqq n-1$. Si j'astreins alors le dénominateur $\varphi_{n-j}\varphi_j$ à diviser φ_n, le terme en z^n sera de la forme $\delta''\varphi_n^{-1}z^n$, où δ'' est entier réel.

Ceci est bien le cas : 1° quand on prend $\varphi_n = n!$; 2° quand on prend pour φ_n les valeurs $b_k(n)^{\rho n}$ ou $b_n(n)^{\rho n}$, comme dans (11_4) et (12_4), avec $k \geqq 1$, car

$$b_k(n)^{\rho n} = b^{\rho n b_{k-1}(n)},$$
$$b_k(n-j)^{\rho(n-j)}b_k(j)^{\rho j} = b^{\rho(n-j)b_{k-1}(n-j) + \rho j b_{k-1}(j)}$$

et

$$nb_{k-1}(n) \geqq (n-j)b_{k-1}(n-j) + jb_{k-1}(j).$$

En effet, ceci a lieu pour $k = 1$; quand $k \geqq 2$,

$$b_{k-1}(n) \geqq 2b_{k-1}(n-1),$$

comme on le vérifie sans peine pour $k = 2, 3, \ldots$ (b est entier $\geqq 2$).

Corollaire. — *Tout nombre algébrique ou transcendant, réel ou non, est racine d'une équation analogue à* (9_4) *à coefficients réels, où les d_i sont des entiers réels convenables, positifs ou négatifs, quand les φ_i satisfont à la condition que $\varphi_{n-i}\varphi_i$ divise φ_n ($i \geqq 0$, $\varphi_0 = 1$). C'est en particulier le cas quand*

$$\varphi_i = i!, \quad ou \quad \varphi_i = b_k(i)\rho^i, \quad ou \quad \varphi_i = b_i(i)\rho^i,$$

comme dans les équations (10_4) *à* (12_4).

Bien entendu, ici, $f(z)$ et $F(z)$ sont des fonctions entières.

Fonctions quasi-entières.

Soient $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, ..., $\psi_{k+1}(z)$ des fonctions entières ($k \geqq 0$), $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k+1}$ k nombres distincts et $\neq 0$. Par définition, j'appelle *fonction quasi-entière à $k+2$ points* (¹) *singuliers essentiels* ∞, $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ la fonction

$$(13_4) \qquad \psi_0(z) + \psi_1\left(\frac{1}{z}\right) + \psi_2\left(\frac{1}{z-\lambda_1}\right) + \ldots + \psi_{k+1}\left(\frac{1}{z-\lambda_{k+1}}\right).$$

Je ne puis justifier ici cette dénomination basée sur les analogies profondes qui existent entre ces fonctions et les fonctions entières.

Je suppose maintenant que chacune des fonctions $\psi_j(z)$ soit de la forme $\sum_1^\infty z^i \varphi_{ji}^{-1}$, où φ_{ji}, qui varie avec i, et peut varier ou non avec j, est entier et assujetti à la seule condition que $\psi_j(z)$ soit une fonction entière : un nombre quelconque N_j est de la forme

$$N_j = A_0 + f_j(\zeta_j),$$

où A_0 est rationnel, et

$$\zeta_j = \zeta, \quad \text{si } j = 0, \qquad \text{ou} \qquad \zeta_j = \frac{1}{\zeta - \lambda_j}, \quad \text{si } j > 0,$$

$$f_j(\zeta_j) = \frac{d_1}{\varphi_{j1}}\zeta_j + \ldots + \frac{d_i}{\varphi_{ji}}\zeta_j^i + \ldots,$$

(¹) Le point λ_j est le point du plan des z complexes qui représente la quantité λ_j réelle ou imaginaire.

d'après les théorèmes II_4 et III_4 et leurs corollaires. Je pose

$$M = N_0 + N_1 + \ldots + N_{k+1}.$$

M étant donné, $k+1$ des quantités N_j peuvent être choisies à volonté. On voit ainsi que tout nombre est d'une infinité de manières représentable par

$$(14_4) \quad M = B_0 + f_0(\zeta) + f_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) + f_2\left(\frac{1}{\zeta - \lambda_2}\right) + \ldots + f_{k+1}\left(\frac{1}{\zeta - \lambda_{k+1}}\right),$$

où B_0 est rationnel, et ζ un nombre arbitraire différent de o, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Les théorèmes II_4 et III_4 s'étendent donc au cas des fonctions quasi-entières à $k+2$ points singuliers essentiels, rationnels ou non ($k \geqq 0$). Mais on voit que, une fois les φ_{ji} déterminés, il existe encore une infinité de représentations d'un même nombre M quelconque (¹).

J'énoncerai le résultat obtenu dans le cas où $k = 0$, $\varphi_{0i} = \varphi_{1i}$, $M = 1$, ζ réel > 0, sous cette forme :

Théorème IV_4. — *Soit φ_i un entier fonction de i et tel que $\sum x^i \varphi_i^{-1}$ soit une fonction entière : tout nombre réel positif ζ est racine d'une infinité d'équations de la forme*

$$(15_4) \quad 0 = \ldots + d'_i \varphi_i^{-1} \zeta^{-i} + \ldots + d'_1 \varphi_1^{-1} \zeta^{-1} + D_0 + d_1 \varphi_1^{-1} \zeta + \ldots + d_i \varphi_i^{-1} \zeta^i + \ldots,$$

où D_0 est rationnel < 0, d_i entier positif $< \varphi_{i+1} \varphi_i^{-1} \zeta^{-1}$, d'_i entier positif $< \varphi_{i+1} \varphi_i^{-1} \zeta$, et dont le second membre est une fonction quasi-entière de ζ.

Séries analogues avec conditions complémentaires pour les coefficients.

On peut encore opérer comme à propos de (1_4 *bis*), page 68, mais en prenant pour c_i la fraction rationnelle ordinaire la plus approchée par défaut de $\varepsilon_{i-1} \zeta_1^{-1}$, et de la forme $d_i \rho_i \varphi_i^{-1}$, où d_i, ρ_i, φ_i sont des entiers, ρ_i, φ_i étant donnés *a priori* (premiers entre eux si l'on veut) pour chaque valeur de i. On a encore

$$\varepsilon_i < \rho_i \varphi_i^{-1}, \qquad d_{i+1} \rho_{i+1} < \varepsilon_i \zeta_1^{-1} \varphi_{i+1} < \rho_i \varphi_{i+1} \varphi_i^{-1} \zeta_1^{-1}.$$

(¹) D'après la terminologie de la théorie des ensembles de M. Cantor, l'ensemble de ces représentations a la puissance du continu, les λ_j étant arbitraires.

Quand $\sum x^i \rho_i \varphi_i^{-1}$ est une fonction entière, on obtient, quel que soit ζ_1, pour tout nombre M, une représentation analogue à (1_4 *bis*) et (1_4 *ter*), page 71, et des formules semblables à (3_4 *bis*), (4_4 *bis*), (9_4) à (12_4). L'extension à la représentation de M par des fonctions quasi-entières se fait de la même manière.

Séries avec lacunes.

Je ne suppose plus maintenant que la série $\sum x^i \rho_i \varphi_i^{-1}$ (à termes positifs pour x positif) soit forcément une fonction entière; elle pourra même être divergente. De plus, je prends ζ_1 réel < 1; les ρ_i et φ_i ne sont assujettis qu'à la condition d'être entiers positifs.

On pourra encore essayer d'appliquer, pour représenter le nombre M, les mêmes procédés que ci-dessus en s'inspirant de ce qui a été dit à propos de (1_4 *ter*), page 71: J'écris encore

$$\varepsilon_i \zeta_1^{-1} = d_{i+1} \rho_{i+1} \varphi_{i+1}^{-1} + \varepsilon_{i+1}, \qquad \varepsilon_i < \rho_i \varphi_i^{-1}, \qquad \varepsilon_{i+1} < \rho_{i+1} \varphi_{i+1}^{-1},$$
$$d_{i+1} \rho_{i+1} \leqq \varepsilon_i \zeta_1^{-1} \varphi_{i+1} < \rho_i \varphi_{i+1} \varphi_i^{-1} \zeta_1^{-1}.$$

Si $\rho_i \varphi_{i+1} \varphi_i^{-1}$ n'est pas assez grand, il pourra se faire qu'on doive prendre $d_{i+1} = 0$. Si alors l'on ne peut trouver j tel que

$$\varepsilon_i \zeta_1^{-j} = d_{i+j} \rho_{i+j} \varphi_{i+j}^{-1} + \varepsilon_{i+j}, \qquad \varepsilon_{i+j} < \rho_{i+j} \varphi_{i+j}^{-1}, \qquad d_{i+j} > 0,$$

la représentation n'est pas possible, à moins qu'on ne modifie le procédé. Voici ce qu'on peut faire.

Je prends $M - c_0 \leqq 1$, c_0 rationnel; je pose, ϖ_i étant un nombre réel quelconque croissant avec i, et $\lim \varpi_i = \infty$ pour $i = \infty$:

$$\varepsilon_0 = M - c_0 = (d_1 \rho_1 \varphi_1^{-1} + \varepsilon_1) \zeta_1^{\varpi_1}, \qquad \varepsilon_1 < \rho_1 \varphi_1^{-1},$$
$$d_1 \rho_1 \leqq (M - c_0) \zeta_1^{-\varpi_1} \varphi_1 \leqq \zeta_1^{-\varpi_1} \varphi_1,$$
$$M - c_0 - d_1 \rho_1 \varphi_1^{-1} \zeta_1^{\varpi_1} = \varepsilon_1 \zeta_1^{\varpi_1} = (d_2 \rho_2 \varphi_2^{-1} + \varepsilon_2) \zeta_1^{\varpi_2}, \qquad \varepsilon_2 < \rho_2 \varphi_2^{-1},$$
$$d_2 \rho_2 \leqq \rho_1 \varphi_1^{-1} \varphi_2 \zeta_1^{\varpi_1 - \varpi_2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$M - c_0 - d_1 \rho_1 \varphi_1^{-1} \zeta_1^{\varpi_1} - \dots - d_{i-1} \rho_{i-1} \varphi_{i-1}^{-1} \zeta_1^{\varpi_{i-1}} = \varepsilon_{i-1} \zeta_1^{\varpi_{i-1}} = (d_i \rho_i \varphi_i^{-1} + \varepsilon_i) \zeta_1^{\varpi_i},$$
$$\varepsilon_i < \rho_i \varphi_i^{-1}, \qquad d_i \rho_i \leqq \zeta_1^{\varpi_{i-1} - \varpi_i} \rho_{i-1} \varphi_{i-1}^{-1} \varphi_i.$$

Il pourra se faire que l'on doive prendre $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, ..., $d_{i-1} = 0$; si ceci a lieu, on aura

$$\varepsilon_{i-1} \zeta_1^{\varpi_{i-1}} = \varepsilon_1 \zeta_1^{\varpi_1} = \varepsilon_0 = (d_i \rho_i \varphi_i^{-1} + \varepsilon_i) \zeta_1^{\varpi_i}, \qquad \varepsilon_i < \rho_i \varphi_i^{-1},$$
$$d_i \rho_i \varphi_i^{-1} + \varepsilon_i = \varepsilon_1 \zeta_1^{\varpi_1 - \varpi_i}, \qquad d_i \rho_i = \varepsilon_0 \zeta_1^{-\varpi_i} \varphi_i - \varepsilon_i \varphi_i > \varepsilon_0 \zeta_1^{-\varpi_i} \varphi_i - \rho_i.$$

Si, les ρ_i et φ_i étant donnés, l'on a choisi les ϖ_j de façon que

$$(16_4)\qquad \varepsilon_0 \zeta_1^{\gamma-\varpi_i} \varphi_i \geqq \rho_i,$$

pour une certaine valeur de i, il faudra prendre $d_i \geqq 1$. Je suppose qu'il en soit ainsi; on a

$$\varepsilon_i \zeta_1^{\varpi_i} < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

On écrira

$$M - c_0 - d_i \rho_i \varphi_i^{-1} \zeta_1^{\varpi_i} = \varepsilon_i \zeta_1^{\varpi_i} = (d_{i+1} \rho_{i+1} \varphi_{i+1}^{-1} + \varepsilon_{i+1}) \zeta_1^{\varpi_{i+1}},$$

$$\varepsilon_{i+1} < \rho_{i+1} \varphi_{i+1}^{-1}, \qquad d_{i+1} \rho_{i+1} \leqq \varepsilon_i \zeta_1^{\varpi_i - \varpi_{i+1}} \varphi_{i+1} < \zeta_1^{\varpi_i - \varpi_{i+1}} \rho_i \varphi_{i+1} \varphi_i^{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$M - c_0 - d_i \rho_i \varphi_i^{-1} \zeta_1^{\varpi_i} - \ldots - d_{i_1-1} \rho_{i_1-1} \varphi_{i_1-1} \zeta_1^{\varpi_{i_1-1}}$$

$$= \varepsilon_{i_1-1} \zeta_1^{\varpi_{i_1-1}} = (d_{i_1} \rho_{i_1} \varphi_{i_1}^{-1} + \varepsilon_{i_1}) \zeta_1^{\varpi_{i_1}},$$

$$\varepsilon_{i_1} < \rho_{i_1} \varphi_{i_1}^{-1}, \qquad d_{i_1} \rho_{i_1} \leqq \varepsilon_{i_1-1} \zeta_1^{\varpi_{i_1-1} - \varpi_{i_1}} \varphi_{i_1} < \rho_{i_1-1} \varphi_{i_1} \varphi_{i_1-1}^{-1} \zeta_1^{\varpi_{i_1-1} - \varpi_{i_1}}.$$

Il pourra se faire que l'on doive prendre

$$d_{i+1} = d_{i+2} = \ldots = d_{i_1-1} = 0;$$

si ceci a lieu, on aura

$$\varepsilon_{i_1-1} \zeta^{\varpi_{i_1-1}} = \varepsilon_i \zeta_1^{\varpi_i} = (d_{i_1} \rho_{i_1} \varphi_{i_1}^{-1} + \varepsilon_{i_1}) \zeta_1^{\varpi_{i_1}},$$

$$d_{i_1} \rho_{i_1} \varphi_{i_1}^{-1} + \varepsilon_{i_1} = \varepsilon_i \zeta_1^{\varpi_i - \varpi_{i_1}}, \qquad d_{i_1} \rho_{i_1} = \varepsilon_i \zeta_1^{\varpi_i - \varpi_{i_1}} \varphi_{i_1} - \varepsilon_{i_1} \varphi_{i_1} > \varepsilon_i \zeta_1^{\varpi_i - \varpi_{i_1}} \varphi_{i_1} - \rho_{i_1}.$$

Si l'on a choisi les ϖ_j de façon que

$$(17_4)\qquad \varepsilon_i \zeta_1^{\varpi_i - \varpi_{i_1}} \varphi_{i_1} \geqq \rho_{i_1},$$

il faudra prendre $d_{i_1} \geqq 1$, d'où, supposant qu'il en soit ainsi :

$$\varepsilon_{i_1} \zeta_1^{\varpi_{i_1}} < \frac{\varepsilon_i}{2} \zeta_1^{\varpi_i} < \frac{\varepsilon_0}{4};$$

et [1] ainsi de suite.

J'admets alors, les ρ_j et φ_j étant donnés, que l'on détermine les ϖ_j par la condition

$$(17_4\ bis)\qquad (1 + \delta_j)^{\varpi_j - \varpi_{j-1}} \geqq \rho_j \varphi_j^{-1},$$

---

[1] Il est évident que le raisonnement peut se continuer indéfiniment d'une manière *identique :* on suppose que l'on ait

$$M - c_0 - d_i \rho_i \varphi_i^{-1} \zeta_1^{\varpi_i} - \ldots - d_n \rho_n \varphi_n^{-1} \zeta_1^{\varpi_n} = \varepsilon_{n_1-1} \zeta_1^{\varpi_{n_1-1}} = \left(d_{n_1} \rho_{n_1} \varphi_{n_1}^{-1} + \varepsilon_{n_1}\right) \zeta_1^{\varpi_{n_1}},$$

$\delta_j > 0$ étant une fonction donnée de j telle que $\lim \delta_j = 0$ pour $j = \infty$. On peut toujours trouver i tel que

$$\varepsilon_0 \zeta_1^{-\varpi_i} \geqq (1 + \delta_i)^{\varpi_i - \varpi_{i-1}} \geqq \rho_i \varphi_i^{-1},$$

et (16_4) a lieu; de même, si $\varepsilon_i \neq 0$, on pourra trouver $i_1 > i$ tel que

$$\varepsilon_i (\zeta_1^{-1})^{\varpi_{i_1} - \varpi_i} \geqq (1 + \delta_{i_1})^{\varpi_{i_1} - \varpi_{i_1 - 1}} \geqq \rho_{i_1} \varphi_{i_1}^{-1};$$

(17_4) a lieu; et ainsi de suite.

On arrive à ce théorème :

THÉORÈME V_4. — *Soient une suite donnée de fractions rationnelles* $\rho_n \varphi_n^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *ordinaires arbitraires*, δ_n *une fonction de n positive, avec* $\lim \delta_n = 0$ *pour* $n = \infty$. *Je choisis les nombres positifs quelconques* ϖ_n, *commensurables ou non, croissant indéfiniment avec n, de façon que*

$$(1 + \delta_n)^{\varpi_n - \varpi_{n-1}} \geqq \rho_n \varphi_n^{-1} \qquad (\varpi_0 = 0).$$

Tout nombre $N \leqq 1$ *peut être mis sous la forme*

$$N = d_1 \rho_1 \varphi_1^{-1} \zeta_1^{\varpi_1} + \ldots + d_n \rho_n \varphi_n^{-1} \zeta_1^{\varpi_n} + \ldots, \tag{18$_4$}$$

où les d_n *sont des entiers nuls ou positifs plus petits que*

$$\zeta_1^{\varpi_{n-1} - \varpi_n} \rho_{n-1} \rho_n^{-1} \varphi_{n-1}^{-1} \varphi_n,$$

et $\zeta_1 > 0$ *un nombre arbitraire réel positif* < 1.

Il est à peine besoin de faire observer que ces séries sont convergentes : cela résulte du mode opératoire employé, car

$$\varepsilon_i \zeta_1^{\varpi_i} < \frac{\varepsilon_0}{2}, \qquad \varepsilon_{i_1} \zeta_1^{\varpi_{i_1}} < \frac{\varepsilon_i}{2} \zeta_1^{\varpi_i} < \frac{\varepsilon_0}{4}, \qquad \ldots$$

---

et l'on raisonne comme ci-dessus en changeant dans les formules i en n, i_1 en n_1 $(n_1 > n)$. On a encore

$$\varepsilon_{n_1} \zeta_1^{\varpi_{n_1}} < \frac{\varepsilon_n}{2} \zeta_1^{\varpi_n},$$

ce qui assure la convergence de la série obtenue (18_4)

Remarque. — On a

$$d_n \rho_n \varphi_n^{-1} \zeta_1^{\varpi_n} < \zeta_1^{\varpi_{n-1}} \rho_{n-1} \varphi_{n-1}^{-1} \leqq \zeta_1^{\varpi_{n-1}} (1 + \delta_{n-1})^{\varpi_{n-1}-\varpi_{n-2}} < [\zeta_1 (1 + \delta_{n-1})]^{\varpi_{n-1}}.$$

Dès que n est assez grand,

$$\zeta_1 (1 + \delta_{n-1}) < \zeta_2,$$

avec ζ_2 fixe < 1. Donc la série $\sum d_n \rho_n \varphi_n^{-1} \zeta_1^{\varpi_n}$ a ses termes plus petits que ceux de la série $\sum \zeta_2^{\varpi_n}$, dès que n est assez grand. On est sûr de la convergence de cette série dans des cas étendus, par exemple si $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est entier, ou limité inférieurement et > 0; cette condition sera en particulier réalisée si $\rho_n \varphi_n^{-1}$ croît très vite avec n, car, d'après (17_4 *bis*),

$$(\varpi_n - \varpi_{n-1}) \log(1 + \delta_n) \geqq \log(\rho_n \varphi_n^{-1}),$$

et même si, dès que n est assez grand,

$$\rho_n \varphi_n^{-1} \geqq 1 + \gamma, \qquad \gamma \text{ fixe} > 0 \text{ quelconque.}$$

Corollaire. — *Tout étant posé comme au théorème ci-dessus, tout nombre < 1 est racine d'une série de la forme*

$$(19_4) \qquad 0 = -1 + d_1 \rho_1 \varphi_1^{-1} x^{\varpi_1} + \ldots + d_n \rho_n \varphi_n^{-1} x^{\varpi_n} + \ldots \quad (^1).$$

Fractions continues.

La marche à suivre pour former des fonctions $f(x)$ représentées par des fractions continues, et dont les racines sont transcendantes, est plus ou moins analogue.

Je me donne encore les entiers positifs ρ_i et φ_i fonctions de i, je prends un nombre N quelconque réel positif au plus égal à 1, et je pose

$$N = \varepsilon_0^{-1}, \qquad \varepsilon_0 \geqq 1.$$

Soit ϖ_n un nombre réel > 0 quelconque fonction de n, ζ un nombre donné réel et positif. J'admets que, parmi les nombres ϖ_1, ϖ_2, ..., on puisse en trouver un ϖ_i d'indice aussi petit que possible

(1) Ce théorème et son corollaire comprennent implicitement plusieurs de ceux qui précèdent : ainsi, quand $\rho_n = 1$, $\varphi_n > 1$, on peut prendre $\delta_n = 0$, $\varpi_n = \varpi_{n-1} + 1$.

et tel que

$$(20_b)\qquad \varepsilon_0\zeta^{-\varpi_i} = d_i\rho_i\varphi_i^{-1} + \varepsilon_i^{-1}, \qquad d_i \geqq 1, \qquad \varepsilon_i > 0,$$

d_i étant le plus grand entier contenu dans $\varepsilon_0\zeta^{-\varpi_i}\varphi_i\rho_i^{-1}$. On aura

$$\varepsilon_i^{-1} < \rho_i\varphi_i^{-1}, \qquad \varepsilon_i > \varphi_i\rho_i^{-1}, \qquad \varepsilon_i\zeta^{-\varpi_i} > \varphi_i\rho_i^{-1}\zeta^{-\varpi_i}, \qquad d_i\rho_i\varphi_i^{-1}\zeta^{\varpi_i} > \frac{\varepsilon_0}{2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Alors

$$N = 1 : \varepsilon_0 = 1 : d_i\rho_i\varphi_i^{-1}\zeta^{\varpi_i} + 1 : \varepsilon_i\zeta^{-\varpi_i}.$$

Je suppose maintenant que, parmi les nombres $\varpi_{i+1}, \varpi_{i+2}, \ldots$, on puisse en trouver un ϖ_{i_1}, d'indice aussi petit que possible et tel que

$$(21_b)\qquad \varepsilon_i\zeta^{-\varpi_i-\varpi_{i_1}} = d_{i_1}\rho_{i_1}\varphi_{i_1}^{-1} + \varepsilon_{i_1}^{-1}, \qquad d_{i_1} \geqq 1, \qquad \varepsilon_{i_1} > 0,$$

d_{i_1} étant le plus grand entier contenu dans $\varepsilon_i\zeta^{-\varpi_i-\varpi_{i_1}}\varphi_{i_1}\rho_{i_1}^{-1}$. On aura

$$\varepsilon_{i_1} > \varphi_{i_1}\rho_{i_1}^{-1}, \qquad \varepsilon_{i_1}\zeta^{-\varpi_{i_1}} > \varphi_{i_1}\rho_{i_1}^{-1}\zeta^{-\varpi_{i_1}}, \qquad d_{i_1}\rho_{i_1}\varphi_{i_1}^{-1}\zeta^{\varpi_{i_1}} > \frac{\varepsilon_i\zeta^{-\varpi_i}}{2} > \frac{1}{2}\varphi_i\rho_i^{-1}\zeta^{-\varpi_i},$$

$$N = 1 : d_i\rho_i\varphi_i^{-1}\zeta^{\varpi_i} + 1 : d_{i_1}\rho_{i_1}\varphi_{i_1}^{-1}\zeta^{\varpi_{i_1}} + 1 : \varepsilon_{i_1}\zeta^{-\varpi_{i_1}};$$

et ainsi de suite. J'admets qu'on ait

$$\varepsilon_{i_k} > \varphi_{i_k}\rho_{i_k}^{-1}, \qquad \varepsilon_{i_k}\zeta^{-\varpi_{i_k}} > \varphi_{i_k}\rho_{i_k}^{-1}\zeta^{-\varpi_{i_k}}, \qquad \varepsilon_{i_{k-1}}\zeta^{-\varpi_{i_{k-1}}-\varpi_{i_k}} = d_{i_k}\rho_{i_k}\varphi_{i_k}^{-1} + \varepsilon_{i_k}^{-1},$$
$$d_{i_k} \geqq 1, \qquad \varepsilon_{i_k} > 0,$$

$$(22_b)\qquad d_{i_k}\rho_{i_k}\varphi_{i_k}^{-1}\zeta^{\varpi_{i_k}} > \frac{1}{2}\varepsilon_{i_{k-1}}\zeta^{-\varpi_{i_{k-1}}} > \frac{1}{2}\varphi_{i_{k-1}}\rho_{i_{k-1}}^{-1}\zeta^{-\varpi_{i_{k-1}}},$$

$$N = 1 : d_i\rho_i\varphi_i^{-1}\zeta^{\varpi_i} + \ldots + 1 : d_{i_k}\rho_{i_k}\varphi_{i_k}^{-1}\zeta^{\varpi_{i_k}} + 1 : \varepsilon_{i_k}\zeta^{-\varpi_{i_k}};$$

puis je suppose que, parmi les nombres $\varpi_{i_k+1}, \varpi_{i_k+2}, \ldots$, on puisse en trouver un, $\varpi_{i_{k+1}}$, d'indice aussi petit que possible, et tel que

$$(23_b)\qquad \varepsilon_{i_k}\zeta^{-\varpi_{i_k}-\varpi_{i_{k+1}}} = d_{i_{k+1}}\rho_{i_{k+1}}\varphi_{i_{k+1}}^{-1} + \varepsilon_{i_{k+1}}^{-1}, \qquad d_{i_{k+1}} \geqq 1, \qquad \varepsilon_{i_{k+1}} > 0.$$

On obtiendra encore les inégalités précédentes, où k est remplacé par $k+1$. Si ce raisonnement peut se continuer indéfiniment, on obtiendra

$$(24_b)\qquad N = 1 : d_i\rho_i\varphi_i^{-1}\zeta^{\varpi_i} + \ldots + 1 : d_{i_k}\rho_{i_k}\varphi_{i_k}^{-1}\zeta^{\varpi_{i_k}} + \ldots.$$

Il reste à préciser des cas où ce procédé peut effectivement se continuer indéfiniment et où la fraction continue obtenue est convergente, c'est-à-dire où

$$N_k = 1 : d_i \rho_i \varphi_i^{-1} \zeta^{\varpi_i} + \ldots + 1 : d_{i_k} \rho_{i_k} \varphi_{i_k}^{-1} \zeta^{\varpi_{i_k}}$$

tend vers la limite N quand k croît indéfiniment. Je me baserai pour cela sur un lemme établi antérieurement et dont je rappelle l'énoncé (Chap. I, n° 3) :

Si, à partir d'une certaine valeur ν de n, le nombre positif a_n est $\geqq 1$, la fraction continue

$$I = 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n + \ldots$$

est convergente.

Pour que N converge, il suffira que, à partir d'une certaine valeur de k, on ait constamment

$$(25_4) \qquad d_{i_k} \rho_{i_k} \varphi_{i_k}^{-1} \zeta^{\varpi_{i_k}} \geqq 1,$$

d'après (24_4); il suffira donc, d'après (22_4),

$$\frac{1}{2} \varphi_{i_{k-1}} \rho_{i_{k-1}}^{-1} \zeta^{-\varpi_{i_{k-1}}} \geqq 1. \qquad \rho_{i_{k-1}} \varphi_{i_{k-1}}^{-1} \zeta^{\varpi_{i_{k-1}}} \leqq \frac{1}{2}.$$

Je supposerai toujours que, les ρ_n et φ_n étant donnés, on ait choisi les ϖ_n de façon que

$$(26_4) \qquad \rho_n \varphi_n^{-1} \zeta^{\varpi_n} \leqq \frac{1}{2},$$

à partir d'une certaine valeur ν_ζ de n [1]. On aura alors, d'après (22_4),

$$\varepsilon_{i_{k-1}} \zeta^{-\varpi_{i_{k-1}}} > 2, \qquad d_{i_k} > \varphi_{i_{k-1}} \varphi_{i_k} \rho_{i_{k-1}}^{-1} \rho_{i_k}^{-1} \frac{\zeta^{-\varpi_{i_{k-1}} - \varpi_{i_k}}}{2} \geqq \varphi_{i_k} \rho_{i_k}^{-1} \zeta^{-\varpi_{i_k}}.$$

---

[1] Avec cette hypothèse, on peut prendre $\varpi_{i_1} = \varpi_{i+1}$, $\varpi_{i_2} = \varpi_{i+2}$, ... On pourrait se contenter de supposer l'inégalité (26_4) satisfaite pour une infinité $n_0, n_1, \ldots$ de valeurs de n. On aurait alors à prendre

$$\varpi_i = \varpi_{n_0}, \qquad \varpi_{i_1} = \varpi_{n_1}, \qquad \varpi_{i_2} = \varpi_{n_2}, \qquad \ldots.$$

La convergence est alors assurée.

On peut indiquer un certain nombre de cas où (26_4) a sûrement lieu.

1° La série $\sum \rho_n \varphi_n^{-1} \zeta^{\varpi_n}$ est convergente. Si, en particulier, cette série est une fonction entière, c'est-à-dire converge quel que soit ζ, (26_4) et (24_4) ont lieu, quel que soit $\zeta > 0$, pour n ou i_k assez grands.

2° Si ζ est quelconque $\leqq 1$, il suffit pour $n > \nu$ (ν donné), $\varphi_n \geqq 2\rho_n$, ϖ_n quelconque > 0, par exemple $\varpi_n = 1$.

3° Si $\zeta < 1$, il suffit $\varphi_n \geqq \rho_n$, avec ϖ_n croissant indéfiniment en même temps que n.

4° Soit $\zeta < 1$: les ρ_n et φ_n étant quelconques, je détermine les ϖ_n croissant indéfiniment avec n de façon que

$$(27_4) \qquad (1 + \delta_n)^{\varpi_n} \geqq \rho_n \varphi_n^{-1},$$

$\delta_n > 0$ étant une fonction arbitraire donnée de n telle que $\lim \delta_n = 0$ pour $n = \infty$. On a alors

$$\rho_n \varphi_n^{-1} \zeta^{\varpi_n} \leqq [(1 + \delta_n)\zeta]^{\varpi_n};$$

$(1 + \delta_n)\zeta$ tend vers ζ quand n croît indéfiniment, et, pour chaque valeur de ζ, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\rho_n \varphi_n^{-1} \zeta^{\varpi_n} \leqq \frac{1}{2};$$

(26_4) a lieu.

Ceci posé, j'admets donc que (26_4) ait lieu à partir d'une certaine valeur de n. Il ne reste qu'à vérifier la possibilité de former la suite des égalités (20_4), (21_4), (23_4).

ε_0 étant $\geqq 1$, (26_4) montre que (20_4) sera possible pour une certaine valeur de $i \geqq \nu_\zeta$; alors

$$\varepsilon_i \zeta^{-\varpi_i} > \varphi_i \rho_i^{-1} \zeta^{-\varpi_i} \geqq 2,$$

et (26_4) montre que (21_4) sera possible pour une certaine valeur (1)

(1) Si l'on spécifie la valeur de ζ, il suffit que $i_1 \geqq \nu_\zeta$; mais, si l'on envisage une catégorie de valeurs de ζ, comme celles que nous avons considérées, ν_ζ pourra dépendre de ζ, et ϖ_{ν_ζ} prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut pour des valeurs convenables de ζ, par exemple si $\lim \varphi_n \rho_n^{-1} = 1$ pour $n = \infty$, et ζ très voisin de 1, avec $\zeta < 1$.

de i_1 (ici $i_1 = i + 1$, $i_k = i + k$) en particulier, si $\rho_n \varphi_n^{-1} \leqq \frac{1}{2}$, $\zeta \leqq 1$, on peut prendre ϖ_i et ϖ_{i_1} arbitraires, par exemple au moins égaux à 1, et ainsi de suite; si

$$\varepsilon_{i_k} \zeta^{-\varpi_{i_k}} > \varphi_{i_k} \rho_{i_k}^{-1} \zeta^{-\varpi_{i_k}} \geqq 2,$$

(26_4) montre que (23_4) est possible pour une certaine valeur de i_{k+1}.

C. Q. F. D.

On arrive finalement au théorème suivant :

Théorème VI_4. — *Soient* $\rho_n \varphi_n^{-1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) *une suite donnée de fractions rationnelles réelles positives arbitraires,* N *un nombre quelconque positif* $\leqq 1$, ϖ_n *un nombre positif quelconque* > 0 *et fonction de* n, $\zeta > 0$ *un nombre réel arbitraire.*

J'admets qu'une des catégories de conditions suivantes soit réalisée :

1° *La série* $\sum \rho_n \varphi_n^{-1} \zeta^{\varpi_n}$ *est convergente pour une valeur donnée de* ζ;

2° *Cette série est une fonction entière de* ζ, *c'est-à-dire converge quel que soit* ζ; ζ *peut prendre toute valeur positive;*

3° *Pour* $n > \nu$ (ν *donné*), $\varphi_n \geqq 2\rho_n$, ϖ_n *quelconque* > 0, *par exemple* $\varpi_n = 1$; ζ *peut prendre une quelconque des valeurs* $\leqq 1$;

4° *Pour* $n > \nu$ (ν *donné*), $\varphi_n \geqq \rho_n$, ϖ_n *croissant indéfiniment avec* n; ζ *peut prendre toutes les valeurs* < 1;

5° *Les* ρ_n *et* φ_n *étant absolument quelconques (positifs), on détermine les* ϖ_n *croissant indéfiniment avec n de façon que*

$$(1 + \delta_n)^{\varpi_n} \geqq \rho_n \varphi_n^{-1},$$

$\delta_n > 0$ *étant une fonction arbitraire donnée de n telle que* $\lim \delta_n = 0$ *pour* $n = \infty$; ζ *peut prendre toutes les valeurs plus petites que* 1.

Alors, N *peut se représenter par la fraction continue convergente*

$$\text{N} = 1 : d_i \rho_i \varphi_i^{-1} \zeta^{\varpi_i} + \ldots + 1 : d_m \rho_m \varphi_m^{-1} \zeta^{\varpi_m} - \ldots,$$

où d_n *est un entier* > 0 *satisfaisant à l'inégalité*

$$d_n > \frac{1}{2} \varphi_n \varphi_{n-1} \rho_n^{-1} \rho_{n-1}^{-1} \zeta^{-\varpi_n - \varpi_{n-1}} \geqq \varphi_n \rho_n^{-1} \zeta^{-\varpi_n},$$

i pouvant dépendre de ζ.

On pourra spécifier, d'après ce qui précède, des cas particulièrement remarquables où l'on peut prendre $\varpi_n = \varpi$ = const., ou d'autres cas intéressants. Voici des exemples :

1° $\sum \rho_n \varphi_n^{-1}$ converge : $\zeta^\varpi \sum \rho_n \varphi_n^{-1}$ converge quel que soit ζ; on peut prendre $\varpi_n = \varpi$ quel que soit ζ. De plus, ici, d_n est

$$\text{un entier} > \frac{1}{2} \varphi_n \varphi_{n-1} \rho_n^{-1} \rho_{n-1}^{-1} \zeta^{-2\varpi} \geqq \varphi_n \rho_n^{-1} \zeta^{-\varpi},$$

et croît indéfiniment avec n. Il en est de même quand $\lim \rho_n \varphi_n^{-1} = 0$ pour $n = \infty$.

2° On a

$$\varphi_n \geqq 2\rho_n,$$

dès que $n \geqq 1$ et $\zeta \leqq 1$; on peut prendre $\varpi_n = \varpi$ arbitraire ($\varpi = 1$ si l'on veut), $i = 1$, $i_1 = 2$, ..., et

$$(28_4)\qquad N = 1 : d_1 \rho_1 \varphi_1^{-1} \zeta^\varpi + 1 : d_2 \rho_2 \varphi_2^{-1} \zeta^\varpi + \ldots + 1 : d_n \rho_n \varphi_n^{-1} \zeta^\varpi + \ldots.$$

En particulier, on peut avoir ρ_n et φ_n indépendants de n; soit

$$\varpi = 1, \qquad \zeta = 2\zeta_1, \qquad \zeta_1 \leqq \frac{1}{2}, \qquad 2\rho_n = \sigma_n;$$

on a

$$d_n > \frac{1}{2} \varphi_n \varphi_{n-1} \rho_n^{-1} \rho_{n-1}^{-1} \zeta^{-2}, \qquad d_n \rho_n \varphi_n^{-1} \zeta^\varpi = d_n \sigma_n \varphi_n^{-1} \zeta_1, \qquad \sigma_n \leqq \varphi_n,$$

$$(29_4)\qquad N = 1 : d_1 \sigma_1 \varphi_1^{-1} \zeta_1 + \ldots + 1 : d_n \sigma_n \varphi_n^{-1} \zeta_1 + \ldots.$$

Soit, par exemple, $\varphi_n = 2\rho_n = \sigma_n$:

$$(30_4)\qquad N = 1 : d_1 \zeta_1 + \ldots + 1 : d_n \zeta_1 + \ldots,$$

où

$$d_n > \varphi_n \rho_n^{-1} \zeta^{-\varpi} = 2\zeta^{-1} = \zeta_1^{-1}, \qquad d_n \text{ entier} > \zeta_1^{-1} \geqq 2;$$

(30_4) peut encore s'écrire

$$(31_4)\qquad N = 1 : \frac{d_1}{2} \zeta + 1 : \frac{d_2}{2} \zeta + \ldots + 1 : \frac{d_n}{2} \zeta + \ldots,$$

où d_n entier > 2.

Corollaire I_4. — *Si les fractions rationnelles positives $\rho_n \varphi_n^{-1}$ sont telles que* $\lim \rho_n \varphi_n^{-1} = 0$ *pour $n = \infty$, tout nombre* $N \leqq 1$ *est de la forme*

$$N = 1 : d_i \rho_i \varphi_i^{-1} \zeta^{\varpi} + 1 : d_{i+1} \rho_{i+1} \varphi_{i+1}^{-1} \zeta^{\varpi} + \ldots,$$

où ζ et ϖ sont des nombres positifs arbitraires, i un nombre qui dépend de ζ, ϖ et N : *i croît indéfiniment avec ζ, et l'entier d_n avec n.*

Tout nombre $N \leqq 1$ *est encore d'une des formes* (28_4), (29_4), (30_4) *ou* (31_4).

Remarque. — En faisant $N = 1$, on obtient des catégories de fractions continues dont tout nombre transcendant réel, soit $\leqq 1$, soit < 1, soit $\leqq \frac{1}{2}$, est racine. Je me contenterai, à titre d'exemple, de signaler ces énoncés :

Corollaire II_4. — *Si la fraction rationnelle réelle positive arbitraire $\rho_n \varphi_n^{-1}$, fonction de n, est telle que* $\lim \rho_n \varphi_n^{-1} = 0$ *pour $n = \infty$, tout nombre positif ζ est racine d'une équation de la forme*

$$f(x) = 1,$$

où

$$f(x) = 1 : d_i \rho_i \varphi_i^{-1} x^{\varpi} + 1 : \ldots + 1 : d_n \rho_n \varphi_n^{-1} x^{\varpi} + \ldots,$$

pour une valeur convenable de i, ϖ étant donné > 0 *(entier ou non), d_n entier croissant indéfiniment avec n. On a alors*

$$\zeta^{\varpi} > \varphi_n \rho_n^{-1} d_n^{-1}.$$

Corollaire III_4. — *Si la fraction rationnelle réelle positive $\rho_n \varphi_n^{-1}$, fonction de n, est* $\leqq \frac{1}{2}$, *tout nombre positif* $\zeta \leqq 1$ *est racine d'une équation de la forme*

$$f_1(x) = 1,$$

où

$$f_1(x) = 1 : d_1 \rho_1 \varphi_1^{-1} x^{\varpi} + 1 : d_2 \rho_2 \varphi_2^{-1} x^{\varpi} + \ldots + 1 : d_n \rho_n \varphi_n^{-1} x^{\varpi} + \ldots,$$

α_n entier, ϖ donné > 0. *On doit prendre alors*

$$\zeta^{\varpi} > \varphi_n \rho_n^{-1} d_n^{-1}, \qquad d_1 > \varphi_n \rho_n^{-1} \zeta^{-\varpi} \geqq 2.$$

En particulier, on pourra choisir

$$f_1(x) = 1 : \frac{d_1 x}{2} + 1 : \frac{d_2 x}{2} + \ldots + 1 : \frac{d_n x}{2} + \ldots,$$

et il faudra

$$\zeta > 2 d_n, \qquad d_n > 2.$$

**Quotients de séries ou de fractions continues.
Fonctions méromorphes et quasi-méromorphes.**

Soient M un nombre quelconque, et $M = M_1 M_2^{-1}$, où M_1 est un nombre arbitraire, et $M_2 = M_1 M^{-1}$, ζ un nombre donné. On pourra, d'après ce qui précède, représenter M_1 et M_2 à l'aide du nombre ζ par des séries, des fractions continues, des fonctions entières ou quasi-entières : M se trouvera représenté par le quotient des deux expressions de M_1 et M_2.

On appelle *fonction méromorphe* $F(x)$ de x une fonction $F = f_1 f_2^{-1}$ quotient de deux fonctions entières; une fonction quasi-méromorphe sera de même le quotient de deux fonctions quasi-entières. On voit que l'on peut toujours représenter M à l'aide d'une fonction méromorphe ou quasi-méromorphe de ζ d'une infinité de manières.

Ce qui précède permettra de préciser en cas de besoin : je n'insiste pas.

Représentations plus compliquées.

Je considère une suite de nombres M, M_1, M_2, ..., M_k, ..., et je représente M à l'aide de M_1, M_1 à l'aide de M_2, ... M sera, par exemple, une fonction entière de M_1, M_1 une de M_2, ... On a

$$M = f(M_1);$$

si je substitue à M_1 sa valeur en fonction de M_2, à M_2 sa valeur en fonction de M_3, ..., j'aurai une représentation de M à l'aide de M_k.

En terminant ce Chapitre, je prierai le lecteur de m'excuser d'avoir donné des cas aussi variés de séries ou fractions continues ayant pour racine un nombre donné arbitraire. La question m'a paru bien inté-

ressante : cette multiplicité d'exemples montre combien l'étude des nombres transcendants considérés comme racines de séries à coefficients rationnels est un problème mal défini, au contraire de ce qui a lieu pour les nombres algébriques considérés comme racines d'équations algébriques à coefficients rationnels.

CHAPITRE V.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES DE NOMBRES TRANSCENDANTS.

Préliminaires. — Les résultats précédents par lesquels j'ai montré la possibilité de représenter un nombre par une série ou une fraction continue à coefficients rationnels, où la variable a une valeur ζ *donnée,* comportent une contre-partie non moins intéressante relative à l'étude des nombres représentables par une série ou une fraction continue *donnée* ([1]), quand la variable prend une suite de valeurs, par exemple toutes les valeurs rationnelles ou algébriques.

Je commence par rappeler les formules (1_4), (2_4), (2_4 *bis*), (3_4), (4_4), (6_4), (7_4), (1_4 *bis*), (1_4 *ter*), etc.

Si je prends en particulier dans (1_4) $\zeta_1 = \frac{1}{10}$, ou dans (6_4) $\zeta = 10$, j'obtiens la représentation décimale bien connue du nombre M. Mais les autres formules me donnent une foule d'autres représentations : je vais m'occuper particulièrement du cas où ζ est entier ou rationnel ordinaire.

Dans ce cas, les formules (1_4) et (6_4) me donnent une première représentation ; d'où ces résultats :

([1]) Soit $f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots$ une série à coefficients rationnels, convergente pour $|x| < \rho$, par exemple; donnant à x une valeur rationnelle $\frac{p}{q}$ telle que $|x| < \rho$, $f\left(\frac{p}{q}\right)$ sera, par définition, un nombre dont $f(x)$ est ***la série ou une série génératrice.*** La question se pose alors de savoir quelle est la nature des nombres $f\left(\frac{p}{q}\right)$; on peut aussi envisager la même question pour une catégorie de séries $f(x)$. De même si x, dans $f(x)$, est un nombre appartenant à une espèce bien définie de nombres, comme celles des nombres algébriques ou des nombres de Liouville.

On trouvera des développements étendus au sujet des fonctions génératrices de nombres transcendants dans mon Mémoire du *Journ. de Math.*, 1904, intitulé : ***Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants.***

Les séries convergentes à termes positifs

$$(1_5) \qquad c_0 + c_1 \frac{p}{q} + \ldots + c_n \frac{p^n}{q^n} + \ldots,$$

où $\frac{p}{q}$ *est rationnel donné et positif* < 1, c_0 *entier quelconque,* c_i *entier* $\leqq \mathrm{E}\left(\frac{q}{p}\right)$, *peuvent représenter tous les nombres positifs possibles, quand les* c_i *prennent toutes les valeurs* $\leqq \mathrm{E}\left(\frac{q}{p}\right)$.

Il en est de même des séries

$$a_0\left(\frac{q}{p}\right)^m + a_1\left(\frac{q}{p}\right)^{m-1} + \ldots + a_m + c_1\left(\frac{p}{q}\right) + \ldots + c_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + \ldots,$$

où m *prend toutes les valeurs possibles, et où les* a_i *et* c_i *sont des entiers prenant toutes les valeurs possibles* $\leqq \mathrm{E}\left(\frac{q}{p}\right)$.

On verra sans peine que les nombres M, dont la représentation est périodique, c'est-à-dire où les c_i reprennent périodiquement les mêmes valeurs dans le même ordre à partir d'un certain indice, sont des nombres rationnels $\left(\text{si l'on prenait, au lieu de } \frac{p}{q}, \text{ un nombre algébrique, ces nombres seraient algébriques}\right)$.

On obtient des résultats similaires avec les formules (1_4 *bis*) et (1_4 *ter*) en faisant ζ_1 rationnel quelconque. A titre d'exemple, je fais en particulier $\zeta_1 = 1$, et j'obtiens cet énoncé, conséquence du corollaire du théorème II_4 :

φ_i *étant un entier fonction de* i, *et* $\sum x^i \varphi_i^{-1}$ *une fonction entière de* x, *tout nombre réel positif est de la forme*

$$(2_5) \qquad d_0\varphi_0^{-1} + d_1\varphi_1^{-1} + \ldots + d_i\varphi_i^{-1} + \ldots,$$

où d_{i+1} *est un entier plus petit que* $\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1}$, $d_0\varphi_0^{-1}$ *une fraction rationnelle.*

La série $f(x) = \sum d_i\varphi_i^{-1} x^i$ *est une fonction entière, et tout nombre réel positif est de la forme* $f(1)$.

De même, $\frac{p}{q}$ *étant un nombre rationnel donné, tout nombre réel positif est de la forme* $f\left(\frac{p}{q}\right)$ *avec* $d_{i+1} < \varphi_{i+1}\varphi_i^{-1} q p^{-1}$.

Cette fois, si la suite des d_i est périodique, $f(1)$ peut parfaitement être transcendant; exemple : $\varphi_i = i!$;

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{i!} + \ldots = e,$$

et l'on sait que le nombre e est transcendant ([1]).

Dans le cas des fractions continues, on aurait des résultats similaires par application du théorème VI_4 et des formules et corollaires qui suivent. Pour retrouver le développement d'un nombre $N > 0$ en fraction continue arithmétique ordinaire $a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$, où les a_i sont entiers, il convient de se reporter aux formules (20_4), (21_4), (23_4), où l'on fait $\zeta = 1$, $\rho_i = \varphi_i$, car la formule (26_4) n'a pas lieu avec ces dernières hypothèses.

Il est intéressant de remarquer dès à présent que la nature arithmétique des nombres représentés par les séries (2_5) peut être en relation simple avec la croissance des φ_i et des d_i. Je prends par exemple

$$f(x) = \sum d_i \varphi_i^{-1} x^i, \qquad \varphi_i = b_k(i)\rho^i$$

[formules $(1_4$ *bis*$)$ et (11_4)], et $0 \leqq d_i \leqq \delta$, δ étant un nombre positif fixe. L'application du théorème de Liouville (Chap. II, p. 13) à $f(pq^{-1})$ considéré comme limite pour $n = \infty$ de

$$\sum_0^n d_i \varphi_i^{-1} (pq^{-1})^i,$$

pq^{-1} étant rationnel > 0, révèle rapidement, quand $k \geqq 3$, que $f(pq^{-1})$ est un nombre transcendant de Liouville. On verra plus loin une démonstration, avec extension, de cette propriété (p. 105).

Ceci m'amène à chercher si l'on peut définir des catégories étendues de séries à coefficients rationnels qui ne prennent en général (la valeur $x = 0$ étant toujours exceptée), pour x rationnel, algébrique, etc., que des valeurs transcendantes.

---

(1) *Voir* plus loin (Chap. IX).

Fonctions génératrices $f(x)$ de nombres transcendants. Cas où x est rationnel (réel ou non). — Les suites ($1'_3$) de la page 27, formées de fractions rationnelles ayant pour limite un nombre transcendant réel ou non ξ, conduisent à des séries génératrices de nombres transcendants, comme on va le voir.

Soit

$$I_n = P_n Q_n^{-1}$$

et

$$f(x) = I_1 + (I_2 - I_1)x + \ldots + (I_n - I_{n-1})x^{n-1} + \ldots;$$

$f(1)$ a précisément pour limite ξ, car la somme des n premiers termes de la série est I_n : $f(1)$ est transcendant.

Je vais indiquer des cas étendus où $f\left(\frac{p}{q}\right)$ est transcendant quand $\frac{p}{q}$ est rationnel.

J'admettrai dans ce qui suit que les I_n satisfont, à partir d'une certaine valeur τ' de n, aux conditions ci-après :

1° On peut toujours supposer que les Q_n vont constamment en croissant, si l'on ne conserve parmi les I_n que des fractions ayant des valeurs distinctes, et telles que

$$Q_{n+1} \geqq Q_n, \qquad |\xi - I_n| = Q_n^{-\lambda_n},$$

où $\lambda_n > 2$, $Q_n \geqq 2$; alors, en effet,

$$|I_{n+1} - I_n| \leqq Q_n^{-\lambda_n} + Q_{n+1}^{-\lambda_{n+1}};$$

si $Q_{n+1} = Q_n$,

$$Q_n^{-1} \leqq |I_{n+1} - I_n| < 2Q_n^{-2};$$

d'où

$$Q_n < 2,$$

ce qui est contradictoire ; donc

$$Q_{n+1} > Q_n.$$

2° Q_n allant constamment en croissant, on a

$$Q_n < Q_{n+1}, \qquad Q_n^{-1} Q_{n+1}^{-1} \leqq |I_{n+1} - I_n| \leqq Q_n^{-\lambda_n} + Q_{n+1}^{-\lambda_{n+1}}.$$

On sait, d'après la définition des suites de Liouville, que, parmi

les λ_n, il y en a une infinité qui sont supérieurs à tout nombre donné *a priori* α; je puis donc supposer qu'on ne conserve dans la suite des I_n, comme pour $(1'_3)$, qu'une partie des fractions, de façon qu'à partir d'une certaine valeur ν_α de n on ait constamment $\lambda_n \geqq \alpha$. Autrement dit, je puis choisir ma suite de manière que, μ_n étant une fonction de n convenable, avec $\mu_{n+1} \geqq \mu_n > 2$, et $\lim \mu_n = \infty$ pour $n = \infty$, on ait toujours

$$\lambda_n \geqq \mu_n, \qquad \lambda_{n+1} \geqq \mu_{n+1} \geqq \mu_n \quad (^1).$$

La suite des I_n étant supposée satisfaire à ces conditions, l'inégalité précédente donne

$$Q_n^{-1} Q_{n+1}^{-1} \leqq |I_{n+1} - I_n| \leqq 2 Q_n^{-\mu_n}, \qquad Q_{n+1} \geqq \frac{1}{2} Q_n^{\mu_n - 1} = Q_n^{\psi_n}, \qquad 2 Q_n^{-\mu_n} = Q_n^{-1-\psi_n},$$

$$\psi_n = \mu_n - 1 - \frac{\log 2}{\log Q_n} < \mu_n - 1, \qquad |I_{n+1} - I_n| \leqq Q_n^{-1-\psi_n} < Q_n^{-\psi_n}.$$

Alors, puisque

$$\mu_{n+1} \geqq \mu_n, \qquad Q_{n+1} > Q_n,$$

on a

$$\psi_{n+1} - \psi_n = \mu_{n+1} - \mu_n + \log 2 [(\log Q_n)^{-1} - (\log Q_{n+1})^{-1}] > 0;$$

de plus, $\lim \psi_n = \infty$ pour $n = \infty$ et, à partir d'une certaine valeur τ'' de n, $\psi_n \geqq 1$.

Finalement, la suite des I_n, pour un nombre de Liouville arbitraire, peut être choisie de façon que, à partir d'une certaine valeur τ de n,

$$(3_5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Q_{n+1} > Q_n \geqq 2, \qquad Q_{n+1} \geqq Q_n^{\psi_n}, \qquad \psi_{n+1} > \psi_n \geqq 1, \\ \lim \psi_n = \infty \quad \text{pour} \quad n = \infty. \end{array} \right.$$

On a encore, pour $n \geqq \tau$,

$$(4_5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Q_{n+1} \geqq Q_n^{\psi_n}, \qquad \ldots, \qquad Q_{\tau+2} \geqq Q_{\tau+1}^{\psi_{\tau+1}}, \\ Q_{\tau+1} \geqq Q_\tau^{\psi_\tau} \geqq 2^{\psi_\tau}, \qquad Q_{n+1} \geqq Q_n^{\psi_n} \geqq 2^{\psi_n \ldots \psi_{\tau+1}\psi_\tau}; \\ |\xi - I_n| = Q_n^{-\lambda_n} \leqq Q_n^{-\mu_n} < Q_n^{-\psi_n}, \qquad |I_{n+1} - I_n| < Q_n^{-\psi_n} \leqq 2^{-\psi_n \ldots \psi_\tau}. \end{array} \right.$$

(1) Voici un moyen simple de former μ_n : on ne conservera dans la suite que les fractions I_{ν_α}, $I_{\nu_{\alpha+1}}$, $I_{\nu_{\alpha+2}}$, ..., en supprimant celles d'entre elles qui ne sont pas distinctes. Si $I_{\nu_{\alpha+i}}$ est une fraction conservée, la valeur de μ_j correspondante pourra être prise égale à $\alpha + i$.

On peut montrer que, *sous ces conditions, $f(x)$ est une fonction entière.*

En effet, chacun des termes de cette série a, à partir d'un certain rang, son module au plus égal à celui du terme correspondant de la série

$$\varphi(x)=\sum 2^{-\psi_n\ldots\psi_\tau}x^n.$$

Pour prouver que $f(x)$ est une fonction entière, il suffit de montrer que $\varphi(x)$ en est une. Or le rapport d'un terme au précédent $(u_{n+1}u_n^{-1})$ est

$$2^{\psi_n\ldots\psi_\tau(1-\psi_{n+1})}x,$$

dont le module tend vers zéro pour toute valeur donnée de x quand n croît indéfiniment : $\varphi(x)$ converge quel que soit x, par suite aussi $f(x)$, qui est bien une fonction entière.

On peut d'ailleurs indiquer une limite inférieure plus simple de Q_{n+1} ou, plus exactement, de $Q_n^{\psi_n}$; en effet, à partir d'une certaine valeur ν de n, supposée $\geqq\tau$, on a $\psi_n > a$, a étant un nombre positif choisi arbitrairement *a priori*. Soit

$$2^{\psi_\tau\ldots\psi_{\nu-1}}=e^\beta,$$

où e est la base des logarithmes népériens et $\beta>0$.

On a

$$2^{\psi_\tau\ldots\psi_n}>e^{\beta a^{n-\nu}}=e^{\beta a^{-\nu}a^n}=e^{(\beta_1 a)^n},$$

où $\beta_1=(\beta a^{-\nu})^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1 quand n croît indéfiniment, et $\beta_1 a$ vers a; dès que n est assez grand, $\beta_1 a>\frac{a}{2}\cdot$ Si $\frac{a}{2}=e^{\frac{1}{\rho}}$, ρ est aussi petit qu'on veut quand a et ν sont assez grands et, d'après (4_5),

$$(5_5)\qquad Q_{n+1}\geqq Q_n^{\psi_n}>e^{e^{n\rho^{-1}}},\qquad |I_{n+1}-I_n|<e^{-e^{n\rho^{-1}}}\quad (^1).$$

(1) J'ajouterai pour les lecteurs suffisamment au courant de la théorie des fonctions entières que ceci donne en même temps une limite supérieure de l'ordre ou inférieure de l'indice de $f(x)$. Cette fonction est d'ordre zéro au sens de M. Borel. Avec ma terminologie, qui entre plus dans le détail et est plus complète, on remarque que, ρ pouvant être pris aussi petit qu'on veut pour ν assez grand, d'après la formule (5_5) ci-dessus, $f(x)$ est d'indice $\geqq 3$ ou intermédiaire entre les fonctions

On peut maintenant montrer que $f(pq^{-1})$ est *transcendant pour toute valeur rationnelle $pq^{-1} \neq 0$, réelle ou non.*

En effet, soit ν_1 la plus petite valeur de n telle que $\psi_{\nu_1} \geqq b$, b étant un nombre positif dont on précisera la valeur plus loin, et

$$f_1(x) = I_{\nu_1+1} x^{\nu_1} + (I_{\nu_1+2} - I_{\nu_1+1}) x^{\nu_1+1} + \ldots + (I_{n+1} - I_n) x^n + \ldots.$$

On a

$$f(x) - f_1(x) = I_1 + (I_2 - I_1)x + \ldots + (I_{\nu_1} - I_{\nu_1-1}) x^{\nu_1-1} - I_{\nu_1} x^{\nu_1}.$$

Pour montrer que $f(pq^{-1})$ est transcendant, il suffit de faire voir que $f_1(pq^{-1})$ l'est, car $f(pq^{-1}) - f_1(pq^{-1})$ est rationnel.

Je pose

$$(6_5) \qquad Q'_n = Q_{\nu_1+1} \ldots Q_{n+1} q^n \qquad (q \text{ réel}).$$

---

entières d'indice 3 et d'indice 2 [c'est-à-dire d'ordre (0, 2, 0) ou (0, 3, ∞), comp. *Journ. de Math.*, 1904, p. 287]. En effet, $e^{e^{\frac{n}{\rho}}} > (e^{e^n})^{\frac{n}{\sigma}}$ pourvu que $e^{\frac{n}{\rho}} > \frac{n}{\sigma} e^n$, ce qui a lieu, dès que n est assez grand, si petit que soit le nombre fixe σ.

Je rappelle à cette occasion qu'une fonction entière $\sum_1^\infty a_n x^n$ est d'indice $\geqq k$ et d'ordre $\leqq (0, k, \rho)$, quand l'on a, à partir d'une certaine valeur de n,

$$|a_n|^{-1} \geqq e_k(n)^{\frac{n}{\rho+\varepsilon}},$$

si petit que soit le nombre positif ε fixé *a priori*. On suppose $(0, k', \rho') < (0, k, \rho)$ dès que $k' > k$, ou $k' = k$ avec $\rho' < \rho$.

Je remarque ici incidemment que l'on peut simplifier un peu la notation de l'ordre dans ma terminologie. Une fonction entière d'ordre $\leqq (\chi, \rho)$ avec $\chi \geqq 0$ est une fonction entière pour laquelle

$$(g) \qquad |a_n|^{-1} \geqq (\log_\chi n)^{\frac{n}{\rho+\varepsilon}},$$

à partir d'une certaine valeur de n. Posant encore $\log_\chi n = e_{-\chi}(n)$, on pourra étendre cette définition au cas où l'on a $\chi < 0$.

Soit $\chi = -k$, $k \geqq 0$; la fonction sera d'ordre $\leqq (-k, \rho)$ si l'on a

$$|a_n|^{-1} \geqq e_k(n)^{\frac{n}{\rho+\varepsilon}};$$

ceci revient à poser $(-k, \rho) = (0, k, \rho)$, et $(-k', \rho') < (-k, \rho)$ dès que $-k' < -k$, ou $-k' = -k$ avec $\rho' < \rho$. La formule (g) ci-dessus est alors générale. (*Comparer* avec la classification des fractions continues arithmétiques, chap. I, n° 10 et *voir* note 1 à la fin du volume.)

La somme des $n - \nu_1 + 1$ premiers termes de $f_1(pq^{-1})$ est

$$I'_n = P'_n Q'^{-1}_n,$$

où P'_n est entier. On a, d'après (4_5),

$$(7_5) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n &= |f_1(pq^{-1}) - I'_n| \leqq |I_{n+2} - I_{n+1}|\,|pq^{-1}|^{n+1} + \ldots \\ &\leqq |pq^{-1}|^{n+1} \{ Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}} + |pq^{-1}| Q_{n+2}^{-\psi_{n+2}} + \ldots \}. \end{aligned} \right.$$

Dès que n est assez grand, d'après (3_5),

$$Q_{n+2} \geqq Q_{n+1}^2, \qquad Q_{n+3} \geqq Q_{n+1}^4, \qquad \ldots, \qquad \psi_{n+1} < \psi_{n+2} < \psi_{n+3} < \ldots,$$
$$A_n \leqq |pq^{-1}|^{n+1} Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}} \{ 1 + |pq^{-1}| Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}} + (|pq^{-1}| Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}})^2 + \ldots \}$$

et, puisque

$$|pq^{-1}| Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}} < \frac{1}{2},$$

dès que n est assez grand,

$$(8_5) \qquad A_n \leqq 2|pq^{-1}|^{n+1} Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}}, \qquad A_n^{-1} \geqq \frac{1}{2} |qp^{-1}|^{n+1} Q_{n+1}^{\psi_{n+1}}.$$

D'autre part, d'après (3_5) et (6_5),

$$Q_n \leqq Q_{n+1}^{\psi_n^{-1}}, \qquad Q_{n-1} \leqq Q_n^{\psi_{n-1}^{-1}} \leqq Q_{n+1}^{\psi_n^{-1}\psi_{n-1}^{-1}}, \qquad \ldots, \qquad Q_{\nu_1+1} \leqq Q_{n+1}^{\psi_n^{-1}\psi_{n-1}^{-1}\ldots\psi_{\nu_1+1}^{-1}},$$

$$(9_5) \qquad Q'_n \leqq q^n Q_{n+1}^{1+\psi_n^{-1}+\psi_n^{-1}\psi_{n-1}^{-1}+\ldots+\psi_n^{-1}\psi_{n-1}^{-1}\ldots\psi_{\nu_1+1}^{-1}}.$$

Pour démontrer la transcendance de $f_1(pq^{-1})$, d'après le théorème de Liouville (Chap. II), il suffira d'établir que, quel que soit a_1 choisi arbitrairement > 1, quand n est assez grand ([1]),

$$Q'^{a_1}_n < A_n^{-1}. \qquad Q'_n < A_n^{-a_1^{-1}},$$

([1]) Le raisonnement qui suit établit en réalité que $f_1(pq^{-1})$ ne peut être algébrique; il montre en outre que, si $f_1(pq^{-1})$ est rationnel, on a, à partir d'une certaine valeur de n, $I'_n = f_1(pq^{-1})$, ce qui est absurde, puisque, $f_1(x)$ ne se réduisant pas à un polynome, on a, pour une infinité de valeurs de n,

$$I'_n \neq I'_{n+1}.$$

Par conséquent $f_1(pq^{-1})$ est un nombre transcendant de Liouville.

ou, *a fortiori*, d'après (9_5), que

$$(10_5) \qquad Q_{n+1}^{1+\psi_n^{-1}+\ldots+\psi_n^{-1}\ldots\psi_{\nu_1+1}^{-1}} q^n < \left(\frac{1}{2}|qp^{-1}|^{n+1} Q_{n+1}^{\psi_{n+1}}\right)^{a_1^{-1}}.$$

Je dis que

$$(10_5\ bis) \qquad 1+\psi_n^{-1}+\ldots+\psi_n^{-1}\ldots\psi_{\nu_1+1}^{-1} < 1+\lambda < \frac{\psi_{n+1}}{2a_1},$$

quand n est assez grand, λ étant positif arbitraire > 0 et < 1. En effet, il suffira

$$(11_5) \quad B_n = 1+\psi_{\nu_1+1}+\ldots+\psi_{\nu_1+1}\ldots\psi_{n-1}+\psi_{\nu_1+1}\ldots\psi_{n-1}\psi_n < (1+\lambda)\psi_{\nu_1+1}\ldots\psi_n.$$

Or, par hypothèse, $\psi_{\nu_1} \geqq b$; je prends b, qui n'a pas encore été fixé, égal à la plus grande des deux quantités $2\lambda^{-1}$ et $4a_1$. On a, pour $n = \nu_1 + 1$,

$$B_{\nu_1+1} = 1+\psi_{\nu_1+1} < (1+\lambda)\psi_{\nu_1+1},$$

car le dernier membre est $\geqq \psi_{\nu_1+1} + 2$. D'ailleurs, si (11_5) a lieu pour une certaine valeur de n, on a

$$B_{n+1} = B_n + \psi_{\nu_1+1}\ldots\psi_{n+1} < \psi_{\nu_1+1}\ldots\psi_{n+1}\left(1+\frac{1+\lambda}{\psi_{n+1}}\right);$$

or

$$\frac{1+\lambda}{\psi_{n+1}} \leqq \frac{(1+\lambda)\lambda}{2} = \frac{\lambda^2+\lambda}{2} < \lambda;$$

donc

$$B_{n+1} < (1+\lambda)\psi_{\nu_1+1}\ldots\psi_{n+1},$$

ce qui entraîne l'exactitude de (11_5) pour toute valeur de n au moins égale à $\nu_1 + 1$.

Pour établir (10_5), il suffira de montrer que

$$q^{na_1a_1^{-1}} Q_{n+1}^{\psi_{n+1}(2a_1)^{-1}} < \left(\frac{1}{2} Q_{n+1}^{\psi_{n+1}} |qp^{-1}|^{n+1}\right)^{a_1^{-1}},$$

ou

$$2q^{na_1-n-1}|p|^{n+1} < Q_{n+1}^{\frac{\psi_{n+1}}{2}},$$

ou encore, si $(2|p|q)^{2a_1} = q_1$, que

$$q_1^n < Q_{n+1}^{\psi_{n+1}}.$$

Mais

$$(12_5) \qquad q_1^n = e^{n \log q_1} < e^{\varepsilon e_\rho^n} < Q_{n+1}^{\varepsilon} < Q_{n+1}^{\psi_{n+1}},$$

d'après (5_5), quels que soient les nombres positifs donnés *a priori* ε et ρ (par exemple $\rho = 1$), dès que n est assez grand; par suite, $f_1(pq^{-1})$ et $f(pq^{-1})$ sont transcendants de Liouville.

En même temps, d'après (6_5), (9_5) et (12_5),

$$(12_5\ bis) \qquad Q_{n+1} < Q'_n < Q_{n+1}^{1+\lambda} q^n < Q_{n+1}^{1+2\lambda},$$

car ε peut être pris $< \lambda$ dans (12_5) : on en conclut, d'après (4_3), que $f_1(pq^{-1})$ et $f(pq^{-1})$ sont des nombres de Liouville correspondants de ξ au sens du Chapitre III.

Je résumerai quelques-uns des résultats précédents dans l'énoncé suivant :

Théorème I_5. — *Soit ξ un nombre transcendant de Liouville limite d'une suite de fractions rationnelles à dénominateurs croissants*

$$I_1 = P_1 Q_1^{-1}, \quad \ldots, \quad I_n = P_n Q_n^{-1}, \quad \ldots,$$

telle que

$$|\xi - I_n| < Q_n^{-\alpha},$$

où α peut être pris aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand.

1° *On peut toujours choisir la suite des I_n de façon que $|\xi - I_n| < Q_n^{-\psi_n}$, $Q_{n+1} \geqq Q_n^{\psi_n}$, où $\psi_n \geqq 1$ est une fonction croissante de n, et, par suite, que $Q_{n+1} > e^{e^{n\rho^{-1}}}$, $|I_{n+1} - I_n| < e^{-e^{n\rho^{-1}}}$, toutes ces inégalités ayant lieu, pour toute valeur arbitrairement choisie de $\rho > 0$, dès que n dépasse une certaine limite.*

2° *Ces conditions réalisées, la fonction*

$$f(x) = I_1 + (I_2 - I_1)x + \ldots + (I_n - I_{n-1})x^{n-1} + \ldots$$

est une fonction entière [d'indice $\geqq 3$ et d'ordre $\leqq (0, 3, \infty)$]; $f(pq^{-1})$ est un nombre transcendant correspondant de ξ au sens du Chapitre III pour toute valeur du nombre rationnel réel ou imaginaire $pq^{-1} \neq 0$, $f(0)$ étant évidemment rationnel.

On verra plus loin que $f(x)$ est encore un nombre transcendant, quand x est algébrique, d'ailleurs réel ou imaginaire. Les calculs seront presque identiques.

Corollaire I_5. — *Les dérivées successives de $f(x)$ jouissent des mêmes propriétés que $f(x)$.*

Pour le montrer, il suffit de vérifier que $f'(x)$ est de même forme que $f(x)$. On a

$$f(x) = I_1 + (I_2 - I_1)x + \ldots + (I_n - I_{n-1})x^{n-1} + \ldots,$$
$$-\varphi(x) = f'(x) = I_2 - I_1 + 2(I_3 - I_2)x + \ldots + n(I_{n+1} - I_n)x^{n-1} + \ldots,$$
$$\varphi(x) = I_1 - I_2 + 2(I_2 - I_3)x + \ldots + n(I_n - I_{n+1})x^{n-1} + \ldots.$$

Je pose

$$(a) \qquad \begin{cases} J_1 = I_1 - I_2, \qquad J_2 - J_1 = 2(I_2 - I_3), \qquad \ldots, \\ \quad J_n - J_{n-1} = n(I_n - I_{n+1}), \qquad \ldots; \end{cases}$$

on a

$$\varphi(x) = J_1 + (J_2 - J_1)x + \ldots + (J_n - J_{n-1})x^{n-1} + \ldots,$$

et il suffit de montrer que la suite des J_n jouit des mêmes propriétés (3_5) et (4_5) que la suite des I_n, à partir d'une certaine valeur de n.

Or, en additionnant membre à membre les n premières égalités (a), on a

$$J_n = I_1 - I_2 + 2(I_2 - I_3) + \ldots + n(I_n - I_{n+1}) = I_1 + I_2 + \ldots + I_n - nI_{n+1}$$
$$= P''_n Q''^{-1}_n,$$

où l'on peut prendre

$$(b) \qquad Q''_n = Q_1 Q_2 \ldots Q_{n+1}.$$

D'autre part, si $\zeta = \varphi(1)$, d'après (4_5),

$$\zeta - J_n = (J_{n+1} - J_n) + (J_{n+2} - J_{n+1}) + \ldots,$$
$$|J_{n+i} - J_{n+i-1}| = (n+i)|I_{n+i} - I_{n+i+1}| < (n+i)Q_{n+i}^{-\psi_{n+i}}.$$
$$|\zeta - J_n| < (n+1)Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}} + (n+2)Q_{n+2}^{-\psi_{n+2}} + \ldots.$$

Or, dans le second membre, le rapport d'un terme au précédent

est, pour n assez grand,

$$\frac{n+i+1}{n+i}\,\frac{Q_{n+i}^{\psi_{n+i}}}{Q_{n+i+1}^{\psi_{n+i+1}}} < \frac{1}{2},$$

si

$$4\,Q_{n+i}^{\psi_{n+i}} < Q_{n+i+1}^{\psi_{n+i+1}},$$

ou, *a fortiori*, d'après (3_5), si

$$4\,Q_{n+i} < Q_{n+i+1},$$

ce qui a lieu, d'après (4_5). On a donc *a fortiori*

$$|\zeta - J_n| < (n+1)Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right) = 2(n+1)Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}}.$$

D'après (b), (6_5) et (12_5 *bis*),

$$(c) \qquad Q_{n+1} < Q''_n < Q'_n < Q_{n+1}^{1+2\lambda}, \qquad Q_{n+1} > Q_n''^{\frac{1}{1+2\lambda}},$$

avec $\lambda = \frac{1}{4}$ par exemple, et q entier > 1, dès que n est assez grand. En même temps

$$2(n+1) < Q_{n+1}^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon \text{ fixe positif aussi petit qu'on veut}),$$

d'après (5_5), et

$$(d) \qquad |\zeta - J_n| < Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}+\varepsilon} < Q_n''^{-\frac{\psi_{n+1}-\varepsilon}{1+2\lambda}} < Q_n''^{-\frac{\psi_{n+1}}{2}}.$$

De même, d'après (b) et (c),

$$Q''_{n+1} = Q_{n+2}Q''_n > Q_{n+2}, \qquad Q_n''^{\frac{1}{1+2\lambda}} < Q_{n+1},$$

et, puisque

$$Q_{n+1}^{\psi_{n+1}} \leqq Q_{n+2},$$

d'après (4_5),

$$Q_n''^{\frac{\psi_{n+1}}{1+2\lambda}} < Q_{n+1}^{\psi_{n+1}} \leqq Q_{n+2} < Q''_{n+1},$$

ou, *a fortiori*,

$$(e) \qquad Q''_{n+1} > Q_n''^{\frac{\psi_{n+1}}{2}}.$$

Enfin, puisque, d'après (d),

$$|\zeta - J_n| < Q_n''^{-\frac{\psi_{n+1}}{2}}, \qquad |\zeta - J_{n+1}| < Q_{n+1}''^{-\frac{\psi_{n+2}}{2}} < Q_n''^{-\frac{\psi_{n+2}}{2}},$$

on a, *a fortiori*,

$$(f) \qquad |J_{n+1} - J_n| < Q_n''^{-\frac{\psi_{n+1}}{4}}.$$

Les inégalités (d), (e), (f) montrent que, à partir d'une certaine valeur de n, les conditions (3_5) et (4_5), où l'on remplace ψ_n par $\psi'_n = \frac{\psi_{n+1}}{4}$, sont toujours satisfaites par la suite des quantités $J_n = P''_n Q_n''^{-1}$. On peut, par conséquent, appliquer le théorème I_5 à la fonction $\varphi(x) = -f'(x)$; de même à $-\varphi'(x) = f''(x)$, ...

C. Q. F. D.

On voit de suite tout l'avantage de ce théorème dans les applications : étant donnée une série à coefficients rationnels

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots;$$

on écrira

$$\varphi(1) = c_0 + c_1 + \ldots + c_n + \ldots, \qquad I_{n+1} = P_{n+1} Q_{n+1}^{-1} = c_0 + c_1 + \ldots + c_n,$$
$$c_n = I_{n+1} - I_n, \qquad I_0 = P_0 = 0$$

et

$$\varphi(x) = I_1 + (I_2 - I_1)x + \ldots + (I_{n+1} - I_n)x^n + \ldots;$$

il suffira que la suite des I_n satisfasse aux conditions du théorème pour que $\varphi(x)$ soit transcendant quand x est rationnel $\neq 0$ ou algébrique. L'étude de la nature arithmétique de $\varphi(x)$, pour ces valeurs de x, est ramenée à celle de $\varphi(1)$.

Voici un exemple étendu d'utilisation de ce théorème :

Je considère la fonction entière illimitée

$$\varphi(x) = a_0 t_0^{-1} + a_1 t_1^{-1} x + \ldots + a_n t_n^{-1} x^n + \ldots,$$

où t_n est réel et divise $t_{n+1} > t_n$, et où les a_n sont des entiers positifs, négatifs ou imaginaires. On a

$$\varphi(1) = \sum_0^\infty a_n t_n^{-1}.$$

Je prends

$$I_{n+1} = \sum_{0}^{n} a_n t_n^{-1};$$

$\varphi(x)$ peut s'écrire

$$\varphi(x) = I_1 + (I_2 - I_1)x + \ldots + (I_{n+1} - I_n)x^n + \ldots.$$

D'ailleurs

$$|\varphi(1) - I_{n+1}| = a_{n+1} t_{n+1}^{-1} + a_{n+2} t_{n+2}^{-1} + \ldots.$$

Si $t_n |a_n^{-1}| t_{n-1}^{-1}$ croît suffisamment vite avec n, le second membre sera plus petit que $t_n^{-\psi_{n+1}} = Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}}$, où $\psi_{n+1} > \psi_n$ avec $\lim \psi_n = \infty$ pour $n = \infty$, et $\varphi(1)$ sera transcendant, par suite aussi $\varphi(x)$ pour x rationnel ou algébrique $\neq 0$.

Voici un cas plus précis :

Je suppose [formule (11_4), p. 69]

$$t_n = b_k(n)^{\rho n}, \qquad |a_{n+1}| \leqq b_k(n)^{\tau},$$

ρ, τ entiers, b étant ici un entier arbitraire; on aura $t_n = Q_{n+1}$, et

$$|a_{n+1} t_{n+1}^{-1} : a_{n+i} t_{n+i}^{-1}| \geqq b_k(n+i)^{\rho(n+i)} b_k(n+1)^{-\rho(n+1)} b_k(n+i-1)^{-\tau} > 2^{i-1},$$

pourvu que ceci ait lieu pour $i = 2$, dès que n est assez grand, c'est-à-dire pourvu que

$$(g) \qquad b_k(n+2)^{\rho(n+2)} > 2 b_k(n+1)^{\tau + \rho(n+1)}.$$

Si ceci a lieu,

$$|\varphi(1) - I_{n+1}| \leqq 2 b_k(n)^{\tau} t_{n+1}^{-1};$$

le premier membre étant $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de n, puisque $I_{n+1} - I_n = a_n t_n^{-1}$, il suffira, si l'on veut établir que $\varphi(1)$ est transcendant, de vérifier que

$$2 b_k(n)^{\tau} t_{n+1}^{-1} \leqq t_n^{-n}, \qquad t_{n+1} \geqq 2 b_k(n)^{\tau} t_n^n,$$

ou, *a fortiori*, que

$$b_k(n+1)^{\rho(n+1)} \geqq b_k(n)^{\tau + 1 + \rho n^2}$$

ou

$$\rho(n+1)\,b_{k-1}(n+1) \geqq (\tau+1+\rho n^2)\,b_{k-1}(n),$$

ce qui entraînera comme conséquence l'inégalité (g).

On en conclut d'abord qu'il faut $k > 2$. Quand $k = 3$, il suffit

$$\log\rho + \log(n+1) + b^{n+1} \geqq \log(\tau+1+\rho n^2) + b^n,$$

les logarithmes étant pris avec la base $b \geqq 2$; ceci a lieu, dès que n est assez grand, quand on prend τ arbitraire positif et fixe. En général, quand $k > 3$, on voit que l'inégalité correspondante est encore satisfaite; je n'insiste pas. Donc :

Les séries illimitées $\sum_0^\infty a_n b_k(n)^{-\rho^n} x^n$, *où* a_{n+1} *est un entier, réel ou non, de module* $\leqq b_k(n)^\tau$, $k \geqq 3$ *et* τ *un nombre positif arbitraire, ne prennent pour* x *rationnel* $\neq 0$, *réel ou non, que des valeurs transcendantes* (*de Liouville*).

On montrera tout à l'heure qu'il en est de même pour x *algébrique.*

Inversement, ces séries n'ont donc que des racines transcendantes.

Ceci comporte une application dans l'étude de la représentation des nombres sous la forme (1_1 *bis*) qui correspond à (11_1) (p. 68 et 69),

$$\mathrm{M} = \sum d_i\, b_k(i)^{-\rho^i} \zeta_1^i,$$

quand on prend ζ_1 rationnel ou algébrique : M ne peut être rationnel ou algébrique que pour des valeurs des d_i limitées inférieurement en fonction de i. On peut dire encore que les nombres rationnels ou algébriques ne peuvent être racines que des équations (11_1) où les d_i sont limités inférieurement en fonction de i, sauf toutefois, bien entendu, si les d_i sont en nombre limité.

On arriverait à des résultats similaires pour la représentation (1_1 *bis*) correspondant à (12_1), en prenant

$$t_n = b_n(n)^{\rho^n}.$$

En particulier, on précise ainsi la propriété déjà indiquée page 93.

Je mentionnerai d'une manière spéciale le cas où l'on prend $x = 1$, a_n réel, $|a_n| \leqq b - 1$, et, si l'on veut, $b = 10$: les nombres $\varphi(1)$ obtenus présentent, dans leur représentation décimale, une infinité de suites de zéros dont l'étendue croît indéfiniment, et sont des nombres transcendants de Liouville; il en a déjà été question antérieurement (Chap. II, p. 20 et suivantes .

Cas où x est algébrique. — Je m'occupe maintenant de savoir quelles valeurs peut prendre la fonction $f(x)$ considérée au théorème précédent, quand x est algébrique et $= \alpha_1$, avec $|\alpha_1| = \rho_1$. Je vais établir que $f_1(\alpha_1)$ est transcendant.

Les équations (7_5) et (8_5) deviennent

$$(13_5) \quad \left\{ \begin{aligned} & B_n = |f_1(\alpha_1) - P'_n(\alpha_1) Q'^{-1}_n| \leqq 2\rho_1^{n+1} Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}}, \\ & B_n^{-1} \geqq \tfrac{1}{2} \rho_1^{-n-1} Q_{n+1}^{\psi_{n+1}} \quad (^1), \end{aligned} \right.$$

où $Q'_n = Q_{\nu_1+1} \ldots Q_{n+1}$ et $P'_n(\alpha_1)$ est un polynome entier en α_1 de degré n. On a

$$\begin{aligned} P'_n(\alpha_1) = {} & P_{\nu_1+1} Q_{\nu_1+2} \ldots Q_{n+1} \alpha_1^{\nu_1} \\ & + (P_{\nu_1+2} Q_{\nu_1+1} - P_{\nu_1+1} Q_{\nu_1+2}) Q_{\nu_1+3} \ldots Q_{n+1} \alpha_1^{\nu_1+1} + \ldots \\ & + (P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1}) Q_{\nu_1+1} \ldots Q_{n-1} \alpha_1^n. \end{aligned}$$

Si l'on prend ν_1 assez grand, on a, pour $n_1 > \nu_1$,

$$|P_{n_1}| \leqq 2\xi_1 Q_{n_1} \quad \text{avec} \quad \xi_1 = |\xi|,$$

et chaque coefficient de $P'_n(\alpha_1)$ a son module au plus égal à

$$4\xi_1 Q_{\nu_1+1} \ldots Q_{n+1} = 4\xi_1 Q'_n.$$

J'applique alors le théorème fondamental I_2, page 19, en prenant

---

(1) Le raisonnement suppose, d'après l'énoncé du théorème I_2, que, parmi les fractions $I'_n(\alpha_1) = P'_n(\alpha_1) Q'^{-1}_n$, il y en a une infinité qui sont distinctes. Si cela n'avait pas lieu, à partir d'une certaine valeur de n, on aurait

$$f_1(\alpha_1) = I'_n(\alpha_1), \qquad B_n = 0.$$

Ceci est impossible, car on a évidemment

$$I'_{n+1}(\alpha_1) - I'_n(\alpha_1) = (I_{n+2} - I_{n+1}) \alpha_1^{n+1} \neq 0.$$

$k_n = n$, $p'_n = 4\xi_1 Q'_n$; d'après (8_2 *bis*),

$$2\xi_1\left(2+\frac{A''_n}{A_0}\right)^{n+1} \geqq 1,$$

ce qui a toujours lieu quel que soit $A''_n \geqq 0$ quand n est assez grand; il suffira donc de prendre $A'' = A'$, où A' est la valeur absolue du plus grand des coefficients $A_1, \ldots, A_d$ en valeur absolue. $f_1(\alpha_1)$ ne peut être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers tous au plus égaux à a' en valeur absolue, de degré au plus égal à α, que si l'on a

$$B_n = |f_1(\alpha_1) - P'_n(\alpha_1)Q'^{-1}_n| > \{MQ'^{d\alpha}_n A_0^{nd\alpha} a'^{d-1}[4\xi_1(2+A'A_0^{-1})^{n+1}]^{(d-1)(\alpha+1)}\}^{-1}.$$

Par conséquent, $f(\alpha_1)$ ne pourra être algébrique, d'après (13_5), si, quelles que soient les quantités données M, α, a', on a, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\frac{1}{2}\rho_1^{-(n+1)} Q_{n+1}^{\psi_{n+1}} > MQ'^{d\alpha}_n A_0^{nd\alpha} a'^{d-1}\left[\left(2+\frac{A'}{A_0}\right)^{n+1} 4\xi_1\right]^{(d-1)(\alpha+1)}.$$

Si, en outre, ceci a lieu, quelles que soient les quantités d et $A'A_0^{-1}$, à partir d'une certaine valeur de n, $f(\alpha_1)$ est transcendant quel que soit le nombre algébrique $\alpha_1 \neq 0$.

On a, d'après (9_5), où Q'_n doit ici être remplacé par $Q'_n q''$,

$$(14_5) \qquad Q'_n = Q_{\nu_1+1} \ldots Q_{n+1} < Q_{n+1}^{1+\psi_n^{-1}+\psi_n^{-1}\psi_{n-1}^{-1}+\ldots+\psi_n^{-1}\ldots\psi_{\nu_1+1}^{-1}},$$

et l'inégalité à établir est

$$Q_{n+1}^{\psi_{n+1}} > 2M\rho_1^{n+1} a'^{d-1}(2+A'A_0^{-1})^{(n+1)(d-1)(\alpha+1)}(4\xi_1)^{(d-1)(\alpha+1)} Q'^{d\alpha}_n A_0^{nd\alpha}.$$

Je remarque d'abord que, d'après (5_5), $Q_{n+1} > e^{e^{n\rho^{-1}}}$, si petit que soit ρ; par suite, puisque $Q'_n \geqq Q_{n+1}$, à partir d'une certaine valeur de n, on aura toujours

$$2M\rho_1^{n+1} a'^{d-1}(2+A'A_0^{-1})^{(n+1)(d-1)(\alpha+1)}(4\xi_1)^{(d-1)(\alpha+1)} A_0^{nd\alpha} < Q'_n;$$

il suffit donc de montrer que

$$Q_{n+1}^{\psi_{n+1}} > Q'^{d\alpha+1}_n \qquad \text{ou} \qquad Q'_n < Q_{n+1}^{\psi_{n+1}(d\alpha+1)^{-1}}.$$

On a vu, à propos de (10_5), que

$$(15_5) \qquad Q'_n < Q_{n-1}^{1+\lambda},$$

λ étant arbitraire, avec $0 < \lambda < 1$, dès que n est assez grand; par conséquent, on a bien, dès que n et ψ_{n+1} sont assez grands,

$$Q'_n < Q_{n-1}^{\psi_{n+1}(d\alpha+1)^{-1}},$$

et $f_1(\alpha_1)$ est transcendant, ainsi que $f(\alpha_1)$, ceci, quel que soit le nombre algébrique α_1. C. Q. F. D.

Remarque. — L'inégalité (15_5) montre encore que la suite des fractions

$$I'_1(\alpha_1), \quad \dots, \quad I'_n(\alpha_1) = P'_n(\alpha_1) Q_n'^{-1}, \quad \dots$$

est telle que, à partir d'une certaine valeur ν de n, on ait

$$\eta_n = f_1(\alpha_1) - I'_n(\alpha_1)$$

avec

$$B_n = |\eta_n| = \varepsilon_n Q_n'^{-\alpha'}, \qquad 0 < \varepsilon_n \leqq 1,$$

d'après (13_5) et (15_5), pour toute valeur arbitraire du nombre positif α', et ceci, quel que soit α_1. Ceci subsiste d'ailleurs si α_1 est rationnel et égal à pq^{-1}, à condition de remplacer Q'_n par $Q'_n q^n = Q_n'^{1+\varepsilon''_n}$, où $\lim \varepsilon''_n = 0$ pour $n = \infty$, comme on l'a déjà indiqué. On pourra donc encore dire que les nombres $f(pq^{-1})$, $f_1(pq^{-1})$, $f(\alpha_1)$, $f_1(\alpha_1)$ sont des nombres correspondants au sens du Chapitre III [note (1), p. 27].

On en tire immédiatement cette conséquence que la série $\varphi(x)$ considérée plus haut (p. 103) ne prend pour x algébrique que des valeurs transcendantes, quand $\varphi(1)$ est transcendant, ce qui est le cas des séries de l'énoncé de la page 105.

Généralisation. — *Cas où x est transcendant d'une certaine nature.* — A propos des séries $f(x)$ on pourra se demander maintenant si $f(x)$ peut prendre des valeurs rationnelles ou algébriques pour des valeurs de x qui sont, non plus algébriques ou rationnelles, mais des nombres transcendants d'une catégorie ou espèce déter-

minée. Ainsi, on pourra prendre pour x précisément un des nombres $f(pq^{-1})$ ou $f(\alpha_1)$, ou encore un des nombres transcendants étudiés antérieurement, par exemple ceux dont il a été question au Chapitre II, formule (13_2), page 21, ou au Chapitre III, page 37 et suivantes. Cette étude se rattache intimement à celle de la nature arithmétique des racines de $f(x)$; les racines de $f(x)$ rendent en effet $f(x)$ nul, c'est-à-dire rendront rationnel $f(x)+A$, quel que soit le nombre rationnel A.

Je vais établir à cet égard un résultat très étendu.

Je considère la série $f(x)$ du théorème I_5, en cherchant quelle valeur elle prend quand on donne à x une valeur transcendante ξ' définie comme limite d'une suite analogue à celle qui définit ξ.

$$i_1 = p_1 q_1^{-1}, \quad \ldots, \quad i_n = p_n q_n^{-1}, \quad \ldots,$$

formée de fractions rationnelles ordinaires (p_n, q_n entiers).

Le raisonnement va être en partie analogue à celui des pages 98 et 106. On prend

$$f(\xi') = I_1 + (I_2 - I_1)\xi' + \ldots + (I_{n+1} - I_n)\xi'^n + \ldots,$$

$$\xi' = i_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = p_{n+1} q_{n+1}^{-1} + \varepsilon_{n+1}, \qquad |\varepsilon_{n+1}| = \varepsilon'_{n+1},$$

$$I'_{n+1} = P'_{n+1} Q'^{-1}_{n+1} = I_1 + (I_2 - I_1) i_{n+1} + \ldots + (I_{n+1} - I_n) i^n_{n+1},$$

$$(16_5) \qquad B_n = |f(\xi') - I'_{n+1}| \leqq |I_2 - I_1|\,|\varepsilon_{n+1}| + \ldots$$
$$+ |I_{n+1} - I_n|\,|\xi'^n - i^n_{n+1}| + |I_{n+2} - I_{n+1}|\,|\xi'|^{n+1} + \ldots.$$

On a ici

$$Q'_{n+1} = Q_1 Q_2 \ldots Q_{n+1} q^n_{n+1};$$

on obtient facilement une limite supérieure du module de la somme T_n des termes de $f(\xi') - I'_{n+1}$ à partir du terme en ξ'^{n+1}; en effet, d'après (4_5), si $|\xi'| \leqq \xi'_1$, ce sera

$$\xi_1'^{n+1}\left(Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}} + \xi'_1 Q_{n+2}^{-\psi_{n+2}} + \ldots\right),$$

d'où l'on tire, comme pour (8_5),

$$|T_n| \leqq 2\xi_1'^{n+1} Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}}, \qquad |T_n|^{-1} \geqq \tfrac{1}{2}\xi_1'^{-n-1} Q_{n+1}^{\psi_{n+1}}.$$

En même temps,

$$(17_5) \qquad Q'_{n+1} < B Q_{n+1}^{1+\psi_n^{-1}+\psi_n^{-1}\psi_{n-1}^{-1}+\ldots+\psi_n^{-1}\psi_{n-1}^{-1}\ldots\psi_{\nu_1+1}^{-1}} q^n_{n+1}$$

(B constante, ν_1 comme précédemment).

D'autre part,

$$\xi'^k - i_{n+1}^k = (\xi' - i_{n+1})(\xi'^{k-1} + \xi'^{k-2} i_{n+1} + \ldots + i_{n+1}^{k-1}),$$

(18₅) $$|\xi'^k - i_{n+1}^k| \leqq |\xi' - i_{n+1}| 2^{k-1} k \xi_1'^{k-1} = 2^{k-1} k \varepsilon'_{n+1} \xi_1'^{k-1},$$

car

$$|i_{n+1}| \leqq 2\xi'_1$$

dès que n est assez grand. Le module de la somme S_n des n premiers termes de $f(\xi') - I'_{n+1}$ est au plus égal à

$$|S_n| \leqq |I_2 - I_1| \varepsilon'_{n+1} + \ldots + |I_{n+1} - I_n| 2^{n-1} n \varepsilon'_{n+1} \xi_1'^{n-1},$$

d'où

(19₅) $$|S_n| Q_1 \ldots Q_{n+1} \leqq |P_2 Q_1 Q_3 \ldots Q_{n+1} - P_1 Q_2 \ldots Q_{n+1}| \varepsilon'_{n+1} + \ldots \\ + |P_{n+1} Q_1 \ldots Q_n - Q_{n+1} Q_1 \ldots Q_{n-1} P_n| 2^{n-1} n \varepsilon'_{n+1} \xi_1'^{n-1}.$$

On a d'ailleurs

$$|P_i| \leqq \lambda' \xi_1 Q_i,$$

où λ' est un nombre positif convenable et $\xi_1 = |\xi|$, avec $\xi = \lim P_n Q_n^{-1}$ pour $n = \infty$; le second membre de (19₅) est une somme de termes dont chacun est au plus égal respectivement à

$$2^k \lambda' \xi_1 \varepsilon'_{n+1} Q_1 Q_2 \ldots Q_{n+1} k \xi_1'^{k-1};$$

d'ailleurs $k \xi_1'^{k-1} \leqq (1 + \xi'_1)^k$, pour $k \geqq 1$, et

$$|S_n| Q_1 \ldots Q_{n+1} \leqq 2^n \lambda' \xi_1 \varepsilon'_{n+1} Q_1 \ldots Q_{n+1} [1 + (1 + \xi'_1) + \ldots + (1 + \xi'_1)^n],$$

ou

$$|S_n| \leqq 2^n \lambda' \xi_1 \varepsilon'_{n+1} (1 + \xi'_1)^{n+1} \xi_1'^{-1}.$$

On en conclut

(20₅) $$B_n = |T_n + S_n| \leqq |T_n| + |S_n| \leqq 2 \xi_1'^{n+1} Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}} \\ + 2^n \lambda' \xi_1 \xi_1'^{-1} \varepsilon'_{n+1} (1 + \xi'_1)^{n+1}.$$

D'après le théorème de Liouville, pour que $f(\xi')$ soit un nombre transcendant de Liouville, il suffira que le dernier membre soit $\leqq Q_{n+1}^{-\alpha}$, quel que soit le nombre positif α, dès que n est assez grand, pourvu toutefois que l'on n'ait pas, à partir d'une certaine valeur de n,

$B_n = 0$ (¹) [comp. note (¹), p. 98 et 106]. Il y a un cas étendu où ceci est bien sûr, c'est le cas où, à partir d'une certaine valeur de n, ε_{n+1} est positif, ξ', I_1 et $I_{n+1} - I_n$ étant toujours positifs; alors, pour vérifier la transcendance de $f(\xi')$, il suffira de s'assurer que, pour n assez grand,

$$(20_5\ bis) \quad 2\xi_1'^{n+1} Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}} + 2^n \lambda' \xi_1 \xi_1'^{-1} (1+\xi_1')^{n+1} \varepsilon'_{n+1} \leqq (Q_1 \ldots Q_{n+1})^{-\alpha} q_{n+1}^{-\alpha n}.$$

On a ici

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon'_{n+1} > 0.$$

J'admettrai que

$$(21_5) \qquad q_n = Q_n^{\varphi_n},$$

où

$$\varphi_n = n^{a(1+\eta_n)},$$

a positif, nul, ou négatif indépendant de n, $\lim \eta_n = 0$ pour $n = \infty$, et qu'on a, en supposant $\xi > 0$,

$$(22_5) \qquad 0 < \xi - I_n = Q_{n+1}^{-g_n}, \qquad 0 < \xi' - i_n = \varepsilon'_n = q_{n+1}^{-g'_n},$$

où g_n et g'_n sont au moins égaux à une fonction de n analogue à φ_n; enfin, j'admets encore que

$$(23_5) \qquad \psi_n > n^{\chi_n}, \qquad Q_{n+1} \geqq Q_n^{\psi_n},$$

où χ_n est positif, et croît indéfiniment avec n (²).

Dès lors, d'après (17_5) et (10_5 *bis*), pour n assez grand,

$$Q_1 \ldots Q_{n+1} = Q_{n+1}^{1+\zeta_n},$$

avec $\lim \zeta_n = 0$ pour $n = \infty$. Pour que $f(\xi)$ soit transcendant, il suffit,

---

(¹) Lorsqu'on ne se préoccupe pas de cette condition, on a plus de latitude pour le choix de ξ', mais $f(\xi')$ est un nombre rationnel (cas où $B_n = 0$) ou un nombre transcendant de Liouville de même espèce que ξ et ξ' avec les conditions (21_5) à (23_5). On aboutit alors à un résultat un peu moins précis, mais plus étendu, analogue au théorème I_5. Le raisonnement qui suit prouve en effet, dans ce cas, seulement que $f(\xi')$ ne peut être algébrique.

(²) Les nombres transcendants ξ, ξ', ... ainsi définis donnent naissance à un groupe ou ensemble H_3 de nombres correspondants (p. 36 et 40).

d'après (20_5 *bis*) et (22_5),

$$a'^n\left(Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}'}+q_{n+2}^{-g'_{n+1}}\right)\leqq Q_{n+1}^{-\alpha(1+\zeta_n)}q_{n+1}^{-\alpha n},$$

où a' est un nombre positif assez grand, mais indépendant de n, c'est-à-dire d'après (21_5),

$$a'^n\left(Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}}+Q_{n+2}^{-g'_{n+1}\varphi_{n+2}}\right)<a'^n\left(Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}}+Q_{n+1}^{-g'_{n+1}\varphi_{n+2}\psi_{n+1}}\right)\leqq Q_{n+1}^{-\alpha(1+\zeta_n)-\alpha n\varphi_{n+1}},$$

ou enfin, puisque, d'après (5_5),

$$2a'^n<Q''_{n+1},$$

dès que n est assez grand, il suffit, γ_n étant analogue à φ_n,

$$Q_{n+1}^{-\psi_{n+1}\gamma_n}<Q_{n+1}^{-\alpha(1+\zeta_n)-\alpha n\varphi_n-n},$$
$$\alpha(1+\zeta_n)+\alpha n\varphi_n+n<\gamma_n(n+1)^{\chi_{n+1}}<\gamma_n\psi_{n+1},$$

d'après (23_5). Ceci a bien lieu pour n assez grand, d'après (21_5), et, par suite, $f(\xi')$ *est transcendant.*

Ce n'est pas tout : supposant $i_{n+1}-i_n$ et i_1 positifs, I_n et I'_n croissent constamment avec n. Si $\xi''=f(\xi')$,

$$\xi''-\mathrm{I}'_{n+1}=|\xi''-\mathrm{I}'_{n+1}|=\mathrm{B}_n.$$

La limite supérieure (20_5) trouvée pour B_n peut être ici améliorée, en tenant compte de (21_5), (22_5), (23_5). En effet,

$$\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n<\xi-\mathrm{I}_n=Q_{n+1}^{-g_n},$$

et

$$|\mathrm{T}_n|\leqq\xi_1'^{n+1}\left(Q_{n+2}^{-g_{n+1}}+\xi'_1Q_{n+3}^{-g_{n+2}}+\ldots\right)\leqq 2\xi_1'^{n+1}Q_{n+2}^{-g'''_{n+1}},$$

où g'''_{n+1} est analogue à g_n; il en résulte

$$\mathrm{B}_n\leqq|\mathrm{T}_n|+|\mathrm{S}_n|\leqq 2\xi_1'^{n+1}Q_{n+2}^{-g'''_{n+1}}+2^n\lambda'\xi_1\xi_1'^{-1}\varepsilon'_{n+1}(1+\xi'_1)^{n+1}$$
$$\leqq a'^n\left(Q_{n+2}^{-g'''_{n+1}}+q_{n+2}^{-g_{n+1}}\right)\leqq a'^n\left(Q_{n+2}^{-g'''_{n+1}}+Q_{n+2}^{-g'_{n+1}\varphi_{n+2}}\right)\leqq a'^nQ_{n+2}^{-\gamma'_n},$$

où γ'_n est analogue à φ_n. Or

(24_5) $$Q'_{n+1}=Q_1Q_2\ldots Q_{n+1}q''_{n+1}=Q_{n+1}^{1+\zeta_n+n\varphi_{n+1}}=Q_{n+1}^{\varphi'_{n+1}},$$

où φ'_n est analogue à φ_n; d'ailleurs, d'après (5_5),

$$a'^n < Q_{n+2}^{n^{-\sigma}},$$

si grand que soit σ, quand n est assez grand; donc

$$B_n = \xi'' - I'_{n+1} \leqq a'^n Q_{n+2}^{-\gamma'_n} < Q_{n+2}^{-\gamma''_n} = Q'^{-\gamma''_n \varphi'^{-1}_{n+1}}_{n+2},$$

où γ''_n est analogue à φ_n. Finalement, on aura

$$(25_5) \qquad 0 < \xi'' - I'_{n+1} = Q'^{-g''_n}_{n+2},$$

où g''_n est analogue à g_n et g'_n.

Le nombre transcendant ξ'' satisfait ainsi à des conditions (24_5), (25_5) de la forme (21_5) et (22_5); de plus, d'après (23_5) et (24_5),

$$Q'^{\varphi'^{-1}_{n+1}}_{n+1} \geqq Q'^{\psi_n \varphi'^{-1}_n}_n, \qquad Q'_{n+1} \geqq Q'^{\psi_n \varphi'_{n+1} \varphi'^{-1}_n}_n;$$

or

$$\varphi'_{n+1} \varphi'^{-1}_n = (n+1)^{a(1+\eta'_{n+1})} n^{-a(1+\eta'_n)} > n^{-\eta},$$

si petit que soit le nombre fixe $\eta - a > 0$, dès que n est assez grand, car

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a (n+1)^{a(1+\eta'_{n+1})} > n^{a\eta'_n - \eta};$$

donc, d'après (23_5),

$$\psi_n \varphi'_{n+1} \varphi'^{-1}_n > n^{\chi_n - \eta} = n^{\chi'_n},$$

où χ'_n est positif et croît indéfiniment avec n. On peut donc trouver

$$\psi'_n \geqq n^{\chi'_n},$$

analogue à ψ_n, et tel que

$$Q'_{n+1} \geqq Q'^{\psi'_n}_n \text{ (1)}.$$

Finalement, *le nombre transcendant* ξ'' *jouit de toutes les pro-*

---

(1) Le même raisonnement donne une inégalité analogue pour q_{n+1}, d'après (21_5).

priétés que l'on a supposées à ξ *et* ξ', d'après (21_5), (22_5), (23_5) et le théorème I_5.

Je dirai que les deux nombres transcendants de Liouville ξ et ξ' satisfaisant à (21_5), (22_5) et (23_5) (et, bien entendu, aux conditions du théorème I_5) sont *de même espèce* (on peut dire aussi qu'ils sont *correspondants,* d'après le Chapitre III, p. 36). Il en résulte que ξ, ξ' et ξ'' sont de même espèce; dès lors, $\xi'''=f(\xi'')$, $\xi^{(\mathrm{iv})}=f(\xi''')$, ... sont de même espèce.

Je dirai encore que la fonction du théorème I_5

$$f(x) = I_1 + (I_2 - I_1)x + \ldots + (I_n - I_{n-1})x^{n-1} + \ldots$$

est *la fonction issue de* ξ *correspondant à la suite* $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$.

Soient $f_1(x), f_2(x), \ldots$ les fonctions issues de $\xi', \xi'', \ldots$; on a

$$\xi = f(1), \qquad \xi' = f_1(1), \qquad \xi'' = f(\xi') = f[f_1(1)], \qquad \ldots.$$

Soient $N_1 = \xi$, N_2, ..., N_θ des nombres transcendants de même espèce, $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_\theta(x)$ les fonctions qui en sont issues; toutes les fonctions $\Phi(x)$ qu'on obtient en combinant [1] d'une façon quel-

---

[1] L'opération qui consiste à remplacer x par $F_i(x)$ est désignée par le symbole

$$s_i = | x;\ F_i(x) |;$$

c'est une *substitution.*

Le produit $s_i s_j$ est l'opération consistant à remplacer x par $F_j(x)$, puis, dans le résultat, x par $F_i(x)$; donc

$$s_i s_j = | x;\ F_j[F_i(x)] |$$

(certains auteurs désignent cette opération non par $s_i s_j$, mais par $s_j s_i$); si $i = j$, on pose $s_i s_i = s_i^2$; de même $s_i^2 s_i = s_i^3$, etc.

Combiner d'une façon quelconque les substitutions $s_1, s_2, \ldots, s_k$, c'est former un produit quelconque

$$s_{i_1}^{\mu_{i_1}} s_{i_2}^{\mu_{i_2}} \cdots s_{i_\theta}^{\mu_{i_\theta}} = | x;\ \Phi(x) |,$$

où les μ_i sont des entiers, et les $i_1, i_2, \ldots, i_\theta$ des indices, distincts ou non, prenant une des valeurs de 1 à k, k pouvant être infini.

L'ensemble des substitutions ainsi obtenues en formant tous ces produits est tel que le produit de deux d'entre elles fait partie de l'ensemble; dans ce cas, on dit que l'ensemble forme *un groupe de substitutions.*

Les fonctions obtenues ici en combinant toutes les substitutions s_i sont les fonctions $\Phi(x)$.

conque par multiplication les substitutions

$$|x;\, F_1(x)|, \quad \ldots, \quad |x;\, F_\theta(x)|$$

ne prennent pour $x = 1$, ou quand x est un des nombres $N_1, \ldots, N_k$, que des valeurs transcendantes $[N_i = F_i(1)]$; $\Phi(1)$ est de plus de même espèce que $N_1 = \xi$.

On remarquera que N_1 étant égal à $F_1(1)$, on obtient $F_1(pq^{-1})$, où pq^{-1} est rationnel, réel et > 0, en faisant dans les calculs de la page 109, $\xi' = i_{n+1} = pq^{-1}$, $\varepsilon_{n+1} = 0$. Il en résulte que $F_1(pq^{-1}) - I'_{n+1}$ satisfait à (25_5), et que $F_1(pq^{-1})$ est un nombre transcendant de même espèce que ξ. Donc $\Phi(pq^{-1})$ a la même propriété.

On obtient ainsi l'énoncé suivant :

Théorème II$_5$. — *Soit ξ un nombre transcendant positif limite d'une suite de fractions rationnelles positives*

$$I_1 = P_1 Q_1^{-1}, \quad \ldots, \quad I_n = P_n Q_n^{-1}, \quad \ldots,$$

telle que

$$I_{n+1} > I_n, \qquad \xi - I_n = Q_{n+1}^{-g_n}, \qquad Q_{n+1} \geqq Q_n^{\psi_n} > Q_n^{n^{\chi_n}}$$

avec

$$g_n = n^{a_1(1+\eta'_n)},$$

a_1 fixe positif ou négatif, $\lim \eta'_n = 0$ *pour* $n = \infty$, *χ_n positif, et croissant indéfiniment avec n, $\psi_{n+1} > \psi_n$; soit $f(x)$ la fonction*

$$f(x) = I_1 + (I_2 - I_1)x + \ldots + (I_n - I_{n-1})x^{n-1} + \ldots,$$

issue de ξ.

Soit encore une suite de nombres transcendants réels positifs de même espèce (¹) *que ξ, c'est-à-dire tels qu'un quelconque ξ_j soit*

(¹) On peut dire aussi qu'ils sont correspondants, comme au Chapitre III, p. 36 et 40, et appartiennent à un groupe H_3.

Lorsqu'on ne s'astreint plus aux conditions $I_{n+1} > I_n$, ξ_j et pq^{-1} réels et positifs, l'énoncé se modifie légèrement : $\Phi(pq^{-1})$ est un nombre rationnel ou un nombre de Liouville de même espèce que ξ (ξ, pq^{-1}, I_n étant réels ou imaginaires).

On remarquera que $f'(x)$, $f''(x)$, ... donnent pour x rationnel des nombres rationnels ou transcendants de même espèce que ξ. Ceci résulte de la condition analogue à (22_5) et des calculs des pages 101, 102, modifiés en conséquence (où l'on doit changer Q''_n en Q''_{n+1}). De même, tout polynome à coefficients rationnels formé avec les fonctions $f_j^{(n)}(x)$, ou encore avec les fonctions $\Phi(x)$ déduites des $f_j^{(n)}(x)$: c'est là une conséquence de ce qu'on vient de dire, du corollaire I_5, du théorème I_5 et du Chapitre III, p. 36 et 40.

limite de la suite

$$i_1 = p_1 q_1^{-1}, \quad \ldots, \quad i_n = p_n q_n^{-1}, \quad \ldots,$$

avec

$$i_{n+1} > i_n > 0, \quad \xi_j - i_n = q_{n+1}^{-g'_n}, \quad q_{n+1} \geqq q_n^{\psi'_n} > q_n^{n^{\chi'_n}},$$

où g'_n, ψ'_n, χ'_n *sont analogues à* g_n, ψ_n, χ_n, *et*

$$q_n = Q_n^{\varphi_n}, \quad \varphi_n = n^{a(1+\eta_n)},$$

a *fixe, positif, nul ou négatif,* $\lim \eta_n = 0$ *pour* $n = \infty$. *Soit enfin* $f_j(x)$ *la fonction génératrice issue de* ξ_j, *comme* $f(x)$ *l'est de* ξ.

A toute substitution

$$|x;\ \Phi(x)|$$

du groupe dérivé des substitutions

$$|x;\ f_j(x)|,$$

où $f_0(x) = f(x)$, *correspond une fonction* $\Phi(x)$ *telle que* $\Phi(pq^{-1})$ *soit un nombre transcendant de Liouville de même espèce que* ξ *pour toute valeur rationnelle positive* $pq^{-1} \neq 0$.

Corollaire I_5. — *Tout étant posé comme dans l'énoncé du théorème, et* $|x, \Phi_1(x)|$ *étant une substitution du même groupe, aucun des nombres transcendants* $\Phi(pq^{-1})$ *n'est racine d'une quelconque des équations* $\Phi_1(x) - A = 0$, *où* A *est un nombre rationnel ou algébrique quelconque.*

Voici une application étendue :

Je considère la série

$$f_\nu(x) = \sum_1^\infty a_n^{(\nu)} t_n^{-1} x^n,$$

où $a_n^{(\nu)}$ est positif et $\leqq a''$ (a'' fini) quels que soient ν et n, et où t_n entier divise t_{n+1} ; de plus

$$t_{n+1} \geqq t_n^{n^{\varpi_n}}, \quad \varpi_{n+1} \geqq \varpi_n, \quad \lim \varpi_n = \infty \text{ pour } n = \infty.$$

On a

$$f_\nu(1) = \sum_1^\infty a_n^{(\nu)} t_n^{-1};$$

je prends

$$i_n = p_n q_n^{-1} = \sum_1^n a_n^{(\nu)} t_n^{-1} > i_{n-1} > 0, \qquad q_n = t_n;$$

$f_\nu(1) - i_n$ est de la forme $q_{n+1}^{-g_n}$ ($\lim g_n = 1$ pour $n = \infty$), et, dès lors, $f_\nu(1)$ est transcendant.

Quand ν varie, avec $a_n^{(\nu)} \leqq a''$, les nombres $f_\nu(1)$ sont de même espèce; le théorème précédent s'applique; donc :

Corollaire II₅. — *A toute substitution* $|x; \Phi(x)|$ *du groupe dérivé des substitutions*

$$|x; f_\nu(x)|,$$

où

$$f_\nu(x) = \sum_1^\infty a_n^{(\nu)} t_n^{-1} x^n,$$

$a_n^{(\nu)}$ *positif* (¹) $\leqq a''$ *fini,* t_n *entier réel diviseur de* $t_{n+1} \geqq t_n^{n^{\varpi_n}}$, ϖ_n *croissant indéfiniment avec* n, *correspond une fonction* $\Phi(x)$ *qui ne prend que des valeurs transcendantes pour toute valeur rationnelle réelle positive* pq^{-1} (²).

Je prends, comme à la page 104, $t_n = b_k(n)^{\rho^n}$, $k \geqq 3$, mais $|a_n^{(\nu)}| \leqq a''$; on a

$$t_{n+1} = b_k(n+1)^{\rho(n+1)} = t_n^{n^{\varpi_n}} = b_k(n)^{\rho n^{1+\varpi_n}},$$

si

$$\rho(n+1)\, b_{k-1}(n+1) = \rho\, n^{1+\varpi_n} b_{k-1}(n),$$
$$\log[\rho(n+1)] + b_{k-2}(n+1) = \log\rho + (1+\varpi_n)\log n + b_{k-2}(n),$$

les logarithmes étant pris dans le système de base b; quand $k \geqq 3$,

---

(¹) On suppose, bien entendu, que $a_n^{(\nu)}$ est, quel que soit ν, $\neq 0$ pour une infinité de valeurs de n.

(²) Les fonctions $f_\nu(x)$ forment un ensemble (au sens de M. Cantor) qui a la puissance du continu.

b entier $\geqq 2$, on a

$$b_{k-2}(n+1) \geqq 2b_{k-2}(n),$$

comme on le voit sans peine, et ϖ_n croît indéfiniment avec n.

Le théorème II_5 et ses corollaires s'appliquent. En tenant compte du théorème I_5, on obtient ce résultat :

Corollaire III_5. — *Tout étant posé comme dans l'énoncé du corollaire II_5, si*

$$t_n = b_k(n)\rho^n, \qquad k \geqq 3,$$

les équations $f_\nu(z) - A = 0$, où A est rationnel ou algébrique, n'ont aucune racine rationnelle, algébrique ou de la forme $\Phi(pq^{-1})$ (pq^{-1} étant rationnel, réel et positif).

Il semble que l'on puisse établir un théorème et des corollaires analogues au théorème II_5 et ses corollaires pour les nombres $\Phi(\alpha_1)$, où α_1 est algébrique, en suivant la même marche, et s'appuyant sur le théorème fondamental I_2 : $\Phi(\alpha_1)$ est alors probablement rationnel, algébrique ou transcendant d'une certaine espèce; c'est-à-dire que les nombres $\Phi(\alpha_1)$, quand ils sont transcendants, jouiraient de propriétés communes, telles en tout cas que l'inégalité (11_2) du théorème I_2 ne serait satisfaite pour aucune valeur de α dès que n est assez grand; la marche à suivre paraît être analogue à celle du théorème II_5.

CHAPITRE VI.

SUR LA CLASSIFICATION DES NOMBRES IRRATIONNELS OU TRANSCENDANTS.

Soit

$$(1_6) \qquad I_1 = A_1 B_1^{-1}, \quad \ldots, \quad I_n = A_n B_n^{-1}, \quad \ldots,$$

une suite de fractions réelles ayant pour limite le nombre réel positif ξ : si

$$a\xi + b = 0, \qquad a > 0,\ a,\ b \text{ entiers},$$

et ξ rationnel, on a

$$aI_n + b = (aA_n + bB_n)B_n^{-1};$$

si l'on n'a pas $aA_n + bB_n = 0$,

$$\xi - I_n = -ba^{-1} - I_n = -(aA_n + bB_n)a^{-1}B_n^{-1},$$

$$(2_6) \qquad |\xi - I_n| \geqq a^{-1}B_n^{-1}.$$

Si la suite (1_6) ne satisfait pas à cette condition quel que soit n, ξ est irrationnel.

On peut se demander s'il y a réciprocité. Autrement dit, toute quantité ζ irrationnelle peut-elle être regardée comme limite d'une suite (1_6) pour laquelle on aura

$$(2_6\ bis) \qquad |\xi - I_n| < a^{-1}B_n^{-1},$$

pour une infinité de valeurs de n, quel que soit le nombre positif a fixé à l'avance ? On peut se poser encore pour une irrationnelle une question plus précise : pour une irrationnelle déterminée, le nombre e par exemple, limite d'une suite analogue à (1_6), peut-on assigner des limites supérieures ou inférieures de $|\xi - I_n|$ en fonction de B_n ? On sait déjà qu'il y aura une réponse affirmative dans certains cas étendus, par exemple quand ξ est algébrique (réel) d'après le théorème de Liouville (Chap. II). Je vais apporter ici une contribution à l'étude de cette question.

Le premier de ces deux problèmes comporte immédiatement une réponse affirmative d'après la formule (7) (n° 6 du Chapitre I); si l'on prend pour (1_6) une suite de réduites consécutives $I_n = P_n Q_n^{-1}$ de $I = \xi$, on a

$$(2 Q_n Q_{n+1})^{-1} < | I - I_n | < (Q_n Q_{n+1})^{-1} < a_{n+1}^{-1} Q_n^{-2} \leqq Q_n^{-2},$$

ce qui entraîne (2_6 *bis*). Je passe au second problème :

Premier cas. — *Les quotients incomplets du développement en fraction continue de* I *sont tous limités* (ordre $-\infty$, Chap. I, n° 10).

On a, d'après (12) et (13) (Chap. I),

$$| I - I_n | > (2 B_n^2)^{-1}, \qquad I_n = A_n B_n^{-1},$$

quand I_n n'est pas une réduite,

$$[2 B_n^2 (a_{n_1+1} + 1)]^{-1} < | I - I_n | < (B_n^2 a_{n_1+1})^{-1},$$

quand I_n est une réduite (d'ordre n_1); par suite, si $a_{n_1} \leqq a$,

$$| I - I_n | > [2 B_n^2 (a + 1)]^{-1},$$

en tout cas, et, quand I_n est une réduite,

$$| I - I_n | < B_n^{-2}.$$

Par conséquent :

Quand les quotients complets du développement en fraction continue de I *sont tous limités et* $\leqq a$, *la suite* (1_6) *est telle que*

$$| I - I_n | > [2 B_n^2 (a + 1)]^{-1}, \qquad I_n = A_n B_n^{-1}.$$

De plus on peut toujours supposer (1_6) *formée de fractions comprenant une infinité de réduites, de façon que, pour les valeurs de n correspondantes,*

$$| I - I_n | < B_n^{-2}.$$

Ce résultat est important : il montre que, dans ce cas, I n'est pas un nombre transcendant de Liouville, d'après la définition donnée

au Chapitre II (p. 14); de même (*voir* plus loin, Chap. VII), les fractions continues quasi-périodiques dont les quotients incomplets sont tous limités, et qui représentent des nombres transcendants, comme on le montrera, sont des nombres distincts des nombres transcendants de Liouville. Ce résultat permet encore d'affirmer que, si une suite analogue à (1_6) renferme une infinité de fractions I_n telles que

$$|I - I_n| < c^{-1} B_n^{-2},$$

quel que soit le nombre positif c, I possède une infinité de quotients incomplets plus grands que tout nombre fixé arbitrairement. C'est le cas des nombres de Liouville : j'y reviendrai tout à l'heure : c'est en particulier le cas des nombres considérés au Chapitre III [formule (22_3) et suivantes].

Deuxième cas. — *Les quotients incomplets forment une suite d'ordre au plus égal à* $(0, \lambda)$, *c'est-à-dire que* $a_n \leqq n^{\lambda+\varepsilon_n}$, ($\lim \varepsilon_n = 0$ *pour* $n = \infty$).

Je suppose d'abord l'ordre égal à $(0, \lambda)$; d'après (15) pour une infinité de valeurs $n_1 + 1$ de n,

$$a_{n_1+1} = (n_1 + 1)^{\lambda+\varepsilon_{n_1+1}},$$

et, quel que soit n,

$$a_n < n^{\lambda+\varepsilon},$$

où ε est positif et fixe, aussi petit qu'on veut dès que n est assez grand.

$I_{n'}$ étant une réduite de I, $P_n Q_n^{-1}$ avec $Q_n = B_{n'}$, on a, d'après (13),

$$|I - I_{n'}| > [2Q_n^2(a_{n+1}+1)]^{-1} > \{2Q_n^2[(n+1)^{\lambda+\varepsilon}+1]\}^{-1} \quad (^1).$$

---

(1) D'après (31_3), $Q_n \geqq 2^{\frac{n-1}{2}}$,

$$2Q_n^2[(n+1)^{\lambda+\varepsilon}+1] < 4Q_n^2(n+1)^{\lambda+\varepsilon} = Q_n^{2(1+\eta_n)},$$

où

$$\eta_n = \frac{\log 4 + (\lambda+\varepsilon)\log(n+1)}{2\log Q_n} \leqq \lambda \frac{\log n}{n}(1+\varepsilon');$$

donc

$$|I - I_{n'}| > B_{n'}^{-2(1+\zeta_{n'})},$$

où $\zeta_{n'} = \eta_n$, $\lim \zeta_{n'} = 0$ pour $n' = \infty$.

Cette formule subsiste, *a fortiori*, pour $|I - I_{n'}|$, quand $I_{n'}$ n'est pas réduite de I, d'après (12), si l'on prend pour Q_n le plus grand dénominateur de réduite inférieur à B_n.

Enfin, cette formule est encore vraie quand on spécifie seulement que l'ordre est $\leqq (0, \lambda)$.

L'ordre étant $(0, \lambda)$, (13) et (15) donnent pour $I_{n'_1}$, supposé réduite d'ordre n_1 :

$$|I - I_{n'_1}| < (Q_{n_1}^2 a_{n_1+1})^{-1} < [Q_{n_1}^2 (n_1 + 1)^{\lambda-\varepsilon}]^{-1}.$$

Quand on spécifie seulement, sans préciser l'ordre, qu'il y a toujours un quotient incomplet, par suite une infinité de quotients incomplets plus grands que toute quantité donnée, la même formule montre que

$$|I - I_n| < (B_n^2 \varphi_n)^{-1},$$

pour une infinité de valeurs de n, φ_n croissant indéfiniment avec n. Donc :

1° *Quand parmi les quotients incomplets du développement en fraction continue de l'irrationnelle* I *il y en a toujours un plus grand que tous les précédents, on peut toujours supposer la suite* (16) *telle que, pour une infinité de valeurs de n*,

$$|I - I_n| < (B_n^2 \varphi_n)^{-1},$$

où φ_n croît indéfiniment avec n.

2° *Si* I *est d'ordre* $(0, \lambda)$, *on peut supposer que, pour une infinité de valeurs de n, à savoir celles qui sont telles que a_{n+1} soit quotient principal,*

$$|I - I_n| < [B_n^2 (n + 1)^{\lambda-\varepsilon}]^{-1}.$$

3° *Quand* I *est d'ordre* $\leqq (0, \lambda)$, *on a toujours pour toute suite* (16)

$$|I - I_n| > (2 B_n^2 \varphi_n)^{-1} \qquad \text{et} \qquad |I - I_n| > B_n^{-2(1+\zeta_n)},$$

où $\lim \zeta_n = 0$ *pour* $n = \infty$.

On verra tout à l'heure que les nombres I considérés ici ne sont pas des nombres transcendants de Liouville.

Parmi les nombres I auxquels ces formules s'appliquent, il faut citer en particulier les nombres

$$J = \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{x} + 1 : \frac{6}{x} + 1 : \frac{10}{x} + \ldots + 1 : \frac{4m+2}{x} + \ldots, \quad (^1)$$

où $x = q^{-1}$, q étant entier. Pour $x = 1$, on a

$$\frac{e+1}{e-1} = 1 + \mu = 1 + (1 + 1 : 6 + 1 : 10 + \ldots),$$

d'où

$$\frac{e-1}{2} = \mu^{-1} = 1 : 1 + 1 : 6 + 1 : 10 + \ldots,$$

ce qui est une formule déjà indiquée page 11. On a évidemment

$$a_m = m^{1+\varepsilon_m},$$

et le nombre J est d'ordre (0, 1), d'après notre terminologie (Chap. I, n° 10). D'après le Chapitre III (énoncé V, p. 53), $I = e^{q^{-1}}$ est d'ordre (0, 1), quel que soit l'entier q (²).

La même méthode s'appliquera pour trouver des limites inférieures et supérieures de $|I - I_n|$ dans le cas où I est d'ordre (k, λ).

Troisième cas. — *Nombres transcendants réels de Liouville.* — Ces nombres sont caractérisés par ce fait qu'ils sont limites d'une

---

(¹) Je n'établis pas ici cette formule : le lecteur, s'il ne veut l'admettre, pourra se reporter à la Géométrie de Legendre (*Éléments de Géométrie*, 9ᵉ édition, Paris, Firmin-Didot, 1812, Note IV, p. 288-290). Legendre arrive simplement à la formule

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x : 1 + x^2 : 3 + x^2 : 5 + \ldots = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1};$$

posant $2x = y$,

$$\frac{e^y-1}{e^y+1} = y : 2 + y^2 : 6 + y^2 : 10 + \ldots = 1 : \frac{2}{y} + 1 : \frac{6}{y} + 1 : \frac{10}{y} + \ldots,$$

d'où

$$\frac{e^y+1}{e^y-1} = \frac{2}{y} + 1 : \frac{6}{y} + 1 : \frac{10}{y} + \ldots,$$

ce qui est la formule dont je me sers.

(²) Si p est un entier > 1, on sait que, I_n étant réduite de I, I_n^p ne peut être réduite de I^p pour une infinité de valeurs de n que si I est d'ordre $\geqq (1, 1)$ (corollaire I_6 et p. 42 et 43, notes 1). Donc, si I_n est une réduite de $e^{q^{-1}}$, I_n^p n'est pas réduite de $e^{pq^{-1}}$.

suite analogue à (1_6), où

$$|I - I_{n'}| = \varepsilon_{n'} B_{n'}^{-\alpha}, \qquad 0 < \varepsilon_{n'} \leqq 1,$$

pour toute valeur du nombre positif α et une infinité de valeurs de n', dès que n' est assez grand. $I_{n'}$ est alors forcément une réduite de I, et l'on peut écrire $B_{n'} = Q_n$; la formule (13) donne

$$\varepsilon_{n'} Q_n^{-\alpha} = |I - I_{n'}| > [2 Q_n^2 (a_{n+1} + 1)]^{-1},$$

d'où

$$3 a_{n+1} > 2(a_{n+1} + 1) > Q_n^{\alpha-2},$$

$$a_{n+1} > \frac{1}{3} Q_n^{\alpha-2} > Q_n^{\alpha-3} = Q_n^{\alpha'},$$

dès que n est assez grand.

Inversement, je suppose que, pour une infinité de valeurs de n, une irrationnelle I soit telle que

$$a_{n+1} > Q_n^{\alpha'};$$

on a, d'après (13), I_n étant une réduite de I,

$$|I - I_n| < Q_n^{-2} a_{n+1}^{-1} < Q_n^{-(\alpha'+2)},$$

et, d'après le théorème de Liouville, I est un nombre transcendant de Liouville. Donc :

THÉORÈME I_6. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une irrationnelle* I *réelle positive soit un nombre transcendant de Liouville est que le développement en fraction continue de* I *renferme une infinité de quotients incomplets* a_{n+1} *plus grands que* $Q_n^{\alpha'}$, *quel que soit le nombre positif* α', Q_n *étant le dénominateur de la réduite* $a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n$.

COROLLAIRE I_6. — *Le développement en fraction continue ordinaire d'un nombre transcendant réel de Liouville est d'ordre* $\geqq (1, 1)$.

On a, en effet, $a_{n+1} > Q_n^{\alpha'}$, et, d'après (31_3) (p. 42-44),

$$(3_6) \qquad a_{n+1} > 2^{\frac{n-1}{2}\alpha'}.$$

Ces résultats sont importants : il s'ensuit que les nombres I dont les quotients complets sont tous limités ne sont pas des nombres

transcendants de Liouville (propriété déjà établie précédemment), et aussi que les nombres $\frac{e^{q^{-1}}+1}{e^{q^{-1}}-1}$ ou $e^{q^{-1}}$ ne sont pas des nombres transcendants de Liouville.

Corollaire II_6. — *$e^{q^{-1}}$, où q est un entier $\geqq 1$, n'est pas un nombre transcendant de Liouville.*

On pourra obtenir des conditions encore plus restrictives pour les quotients incomplets si l'on considère des nombres de Liouville spéciaux [1], par exemple ceux qui appartiennent aux ensembles H_2 et H_3 du Chapitre III (p. 34), et si on leur applique les formules (12) et (13) : je n'insiste pas, en renvoyant le lecteur à la fin du volume, à la Note II complémentaire de ce Chapitre.

---

[1] Ainsi, d'après un calcul rapide, il me semble pouvoir affirmer que l'ordre des nombres transcendants de Liouville $f_\nu(z)$, où z est rationnel et f_ν une des fonctions considérées au corollaire III_5 du théorème II_5, est au moins égal à $(1, \infty)$ quand $k \geqq 4$.

CHAPITRE VII.

LES FRACTIONS DÉCIMALES ET LES FRACTIONS CONTINUES QUASI-PÉRIODIQUES.

J'ai établi ailleurs les deux théorèmes suivants :

Théorème I_7. — *Soit un nombre*

$$X = A + \sum_{1}^{\infty} \delta_n q^{-\psi_n}$$

(δ_n *entier positif* $\leqq q - 1$, A, q *entiers,* ψ_n *entier fonction croissante de* n) *qui, représenté ainsi dans le système de numération de base* q, *possède après le* $\psi_n^{ième}$ *chiffre significatif* δ_n *à droite de la virgule un nombre de zéros suffisamment grand* (¹) (*ce qui revient à dire que* ψ_n *croît assez vite avec* n), *autrement dit, par définition, un nombre quasi-rationnel dans le système de numération de base* q.

Dans un système de numération de base q_1 *première à* q, X *est représenté par* A + *une fraction quasi-périodique simple, c'est-à-dire une fraction qui présente immédiatement à la droite de la virgule une infinité de suites* $s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots$ *de chiffres dont chacune est formée par la répétition un nombre aussi grand que l'on veut de fois* (*dès que* m *est assez grand*) *d'un même groupe de chiffres dit* période, *les périodes commençant aussitôt après la virgule.*

La suite s_m s'obtient en prenant le nombre

$$A + \sum_{1}^{m} \delta_n q^{-\psi_n},$$

(¹) Exemple : les nombres N définis par les formules (23_3), page 38, quand on remplace b par q. A l'occasion, il m'arrive de dire, par extension, que la représentation ci-dessus de X est *décimale;* correctement, il faudrait dire : q^{imale}. Les progrès de la théorie permettront de décider s'il n'est pas préférable d'appeler *quasi-rationnels* tous les nombres de Liouville.

exprimé dans le système de numération de base q_1; elle s'arrête au $(m_1 - 1)^{\text{ième}}$ ou au $m_1^{\text{ième}}$ chiffre significatif à droite de la virgule exclusivement, si le premier chiffre significatif $\neq 0$ de $\delta_{m+1} q^{-\psi_{m+1}}$ à droite de la virgule dans le système de base q_1 est le $m_1^{\text{ième}}$; quelques chiffres de la dernière période de s_m peuvent manquer.

J'ai établi de même un théorème en partie réciproque :

Théorème II_7. — *Soit une fraction* X′ *quasi-périodique dans le système de numération de base* q_1, *c'est-à-dire, par définition, une fraction qui présente, à la droite de la virgule, une infinité de suites* $s_1, s_2, \ldots, s_m, \ldots$ *de chiffres dont chacune est formée par la répétition un nombre* $k_1, k_2, \ldots, k_m, \ldots$ *de fois au moins d'un même groupe de chiffres, ces suites commençant ou non après la virgule (le nombre de chiffres* α_n *de la partie non périodique immédiatement après la virgule ne croissant pas trop vite quand n croît, ou restant limité). Si* k_n *croît assez vite avec n par rapport à* $s_n k_n^{-1}$ *et* α_n, X′ *est un nombre transcendant de Liouville.*

Je ne reproduis pas la démonstration de ces deux théorèmes; on la trouvera abordable pour un étudiant, dans mon Mémoire précité [1]. Je ferai remarquer que, puisque $e^{q^{-1}}$ n'est pas un nombre de Liouville (corollaire II_6 du théorème I_6, p. 125), il n'est non plus ni quasi-périodique, ni, bien entendu, périodique dans aucun système de numération, $e^{q^{-1}}$ étant irrationnel (Chap. IX, plus loin).

J'établirai ici seulement ce théorème :

Théorème III_7. — *Tout nombre transcendant réel de Liouville, d'ordre suffisamment grand, représenté dans le système de numération de base entière q* [2], *est un nombre quasi-rationnel ou une fraction quasi-périodique.*

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 1904, p. 357 et suivantes.

(2) Je pense que, en cas de besoin, le lecteur pourra étendre au système de numération de base q les propriétés connues des fractions décimales périodiques.

Il peut néanmoins être utile de donner quelques indications à cet égard. Soit la fraction irréductible périodique

$$F = PQ^{-1} = f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2} + \ldots + f_c q^{-c} + f'_1 q^{-c-1} + \ldots + f'_n q^{-c-n} + \ldots,$$

où $f_1, \ldots, f_c$ sont les chiffres de la partie non périodique, $f'_1, \ldots f'_n$ ceux de la pé-

En effet, je considère le nombre [illegible] de Liouville défini par les [illegible] et la fraction [illegible]. Je suppose que [illegible] qui seront [illegible]

$$[illegible] = [illegible] - \sum [illegible]$$

où [illegible] est entier [illegible] un entier positif et [illegible] étant les facteurs premiers distincts de [illegible]. $\sum$ [illegible]

est une fraction périodique simple ou mixte, ou une fraction limitée.

Si [illegible] est une fraction périodique [illegible] a une partie non périodique [illegible] avec [illegible] ou [illegible] nous [illegible] le nombre de chiffres [illegible] de la partie non périodique est [illegible] quant au nombre des chiffres N_x de la période, il est [illegible] au plus égal au nombre des restes distincts que peut donner la division d'un nombre quelconque par [illegible] c'est-

---

[illegible]

$$[illegible]$$

Le plus grand facteur [illegible] exclusivement avec les diviseurs premiers [illegible] serait divisible par [illegible] on aurait [illegible] et [illegible] la partie périodique des chiffres de [illegible].

[illegible] des nombres [illegible] mais [illegible] c'est-à-dire que [illegible] le plus petit entier au moins égal à la fois à [illegible] il est donc au plus égal au plus grand des nombres [illegible] si [illegible] entier ou non.

Si [illegible] avec [illegible] c'est-à-dire [illegible] un nombre limité de chiffres significatifs [illegible] divise [illegible] et ne divise pas [illegible] le plus petit entier au moins égal à la fois à [illegible] on a encore [illegible]

Comme, d'après le théorème III et le Chapitre III, les nombres déduits de plusieurs nombres de Liouville correspondants, d'ordre assez grand, par les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, jouiront de la propriété indiquée dans l'énoncé.

à-dire $\leqq Q_n$. Donc

$$C_n \leqq \frac{\log Q_n}{\log 2}, \qquad N_n \leqq Q_n.$$

D'autre part, $\sum_1^\infty \delta_j q^{-j}$ est une fraction limitée sous la condition nécessaire et suffisante que Q_n soit de la forme $q_1^{a'} q_2^{b'} \ldots q_k^{l'}$; le nombre C'_n des chiffres δ_j est $C'_n \leqq \mu \leqq \frac{\log Q_n}{\log 2}$.

On pourra avoir les deux mêmes cas pour I_{n+1}, et

$$C_{n+1} \leqq \frac{\log Q_{n+1}}{\log 2}, \qquad N_{n+1} \leqq Q_{n+1} \qquad \text{ou} \qquad C'_{n+1} \leqq \frac{\log Q_{n+1}}{\log 2}.$$

Enfin, d'après (2_3) (p. 25) et (17_3) (p. 35),

$$\eta_n = \xi - I_n = \pm Q_n^{-\alpha'_n};$$

α'_n croît indéfiniment avec n.

Premier cas. — Si Q_n est de la forme $q_1^{a'} q_2^{b'} \ldots q_k^{l'}$, soit

$$q^{\mu'_n} = Q_n^{\alpha'_n}, \qquad \mu'_n = \alpha'_n \log Q_n,$$

les logarithmes étant pris dorénavant dans le système de base q. On a

$$|\xi - I_n| = Q_n^{-\alpha'_n} = q^{-\mu'_n};$$

$\mu'_n \alpha'^{-1}_n$ est aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand.

a. Si $\xi > I_n$, ξ possède tous les chiffres significatifs de I_n; en effet,

$$\xi = A + \sum \delta_j q^{-j} + (\xi - I_n);$$

le premier chiffre significatif $\neq 0$ de $\xi - I_n$ à droite de la virgule a son rang $\geqq \mu'_n$: ξ possède donc une suite d'au moins

$$(1_7) \qquad \mu'_n - 1 - C'_n \geqq \alpha'_n \log Q_n - 1 - \frac{\log Q_n}{\log 2} = [\alpha'_n - (\log 2)^{-1}] \log Q_n - 1$$

zéros consécutifs. On peut considérer 0 comme formant une période.

b. Si $\xi < I_n$,

$$\xi = A + \sum \delta_j q^{-j} - (I_n - \xi).$$

Le premier chiffre significatif $\neq 0$ de $I_n - \xi$ à droite de la virgule a son rang $\geq \mu'_n$: quand on retranche $I_n - \xi$ de I_n, on obtient donc au moins $\mu'_n - 1 - C'_n$ chiffres $q - 1$ consécutifs (des 9 si $q = 10$). On peut considérer $q - 1$ comme formant une période.

Deuxième cas. — Q_n n'est pas de la forme $q_1^{a'} q_2^{b'} \ldots q_k^{l'}$, c'est-à-dire que I_n est une fraction périodique illimitée dans le système de numération de base q. On a encore

$$|\xi - I_n| = Q_n^{-\alpha'_n} = q^{-\mu'_n}.$$

a. Si $\xi > I_n$, ξ possède en commun avec I_n au moins $\mu'_n - 1 - N_n$ chiffres significatifs ([1]), c'est-à-dire au moins

$$\mu'_n - 1 - N_n - C_n \geq [\alpha'_n - (\log 2)^{-1}] \log Q_n - 1 - Q_n$$

chiffres faisant partie des périodes de I_n. Il y aura ainsi au moins autant de ces périodes qu'il y a d'entiers dans

$$(17\ bis) \qquad \{[\alpha'_n - (\log 2)^{-1}] \log Q_n - 1\} Q_n^{-1} - 1,$$

puisque $N_n \leq Q_n$.

b. Si $\xi < I_n$, $\xi = I_n - (I_n - \xi)$, et la même formule est applicable.

Il suffira dès lors que, pour une infinité de valeurs de n, le nombre (17 *bis*) soit plus grand que toute quantité donnée *a priori* : (17) sera *a fortiori* plus grand que cette quantité, et ξ contiendra autant qu'on veut de périodes correspondantes de I_n.

D'après une propriété précédemment établie, ceci revient à dire que α'_n croît assez vite avec n, par suite que l'ordre de ξ ou de son développement en fraction continue est suffisamment grand ([2]).

([1]) Il convient de retrancher N_n de $\mu'_n - 1$ parce que, dans le cas *a*, les derniers chiffres de la période (mais non tous) peuvent être des chiffres $q - 1$, et, dans le cas *b*, des zéros.

([2]) Pour plus de précision, *voir* Note II à la fin du Volume.

Remarque. — Un nombre transcendant de Liouville, même s'il ne satisfait pas à la condition ci-dessus (1_7 *bis*), aura encore un développement quasi-périodique dans le système de numération de base q quand

$$(2_7) \qquad \{[\alpha'_n - (\log 2)^{-1}] \log Q_n - 1\} N_n^{-1}$$

est plus grand que toute quantité donnée pour une infinité de valeurs de n. *A priori*, la chose n'est pas impossible, car N_n peut être toujours beaucoup plus petit que $[\alpha'_n - (\log 2)^{-1}] \log Q_n$, au moins pour une valeur convenable de q. Ceci aura lieu, d'après ce qu'on a vu dans le premier cas, où $N_n = 1$, et la formule (1_7), s'il y a une infinité de valeurs de Q_n de la forme $q_1^{a'} q_2^{b'} \ldots q_k^{l'}$.

La question se pose alors de trouver pour ξ les valeurs de q, s'il y en a, pour lesquelles ξ est quasi-périodique. Il y en aura toujours, d'après le premier cas, s'il y a une infinité de valeurs Q_{n_1} de Q_n pour lesquelles Q_{n_1} ne contient, quel que soit n_1, que les mêmes facteurs premiers. Si Q_{n_1} est de la forme $r_1^{a''} r_2^{b''} \ldots r_k^{l''}$, les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_k$ restant les mêmes pour une infinité de valeurs de n_1, et si je prends pour q un nombre n'ayant aucun facteur premier différent de $r_1, r_2, \ldots, r_k$ et les ayant tous, on a $N_n = 1$, et la condition (2_7) est toujours satisfaite, car α'_n croît indéfiniment avec n.

Quand on ne peut trouver une infinité de valeurs de Q_{n_1} de la même forme $r_1^{a''} r_2^{b''} \ldots r_k^{l''}$, il resterait encore à élucider s'il y a bien toujours des valeurs de q pour lesquelles ξ est quasi-périodique.

J'ai indiqué aussi, sans donner de démonstration, dans mon Mémoire précité ([1]), que les fractions continues quasi-périodiques simples ou mixtes (les suites de quotients incomplets remplaçant ici les suites des nombres à la droite de la virgule mentionnées dans le théorème II_7) étaient des nombres transcendants. Je vais établir ici cette propriété, en donnant des exemples de pareilles fractions continues.

Soit donc I une pareille fraction continue présentant α_n premiers quotients incomplets (en dehors de a_0), $a_1, a_2, \ldots, a_{\alpha_n}$ formant la partie non périodique, puis une suite s_n de quotients incomplets formée par la répétition, au moins k_n fois, de λ_n quotients dans le

([1]) *Journal de Mathématiques*, 1904.

même ordre, c'est-à-dire d'au moins k_n périodes. Je suppose que ce fait se présente pour $n = 1, 2, \ldots$, de façon que k_n croisse assez vite avec n par rapport à λ_n et α_n. Soit A'_n la partie non périodique, A_n la période correspondante.

Il y a une fraction continue périodique Y_n (¹) ayant pour partie non périodique A'_n, puis pour partie périodique A_n; de même, il y a une fraction continue x_n périodique simple ayant pour période A_n. On a, d'après la formule (5) (p. 4), où l'on remplacera x_{α_n+1} par x_n,

$$Y_n = a_0 + 1 : a_1 + 1 : \ldots + 1 : a_{\alpha_n} + 1 : x_n,$$

$$Y_n = \frac{p_{\alpha_n} x_n + p_{\alpha_n - 1}}{q_{\alpha_n} x_n + q_{\alpha_n - 1}} = \frac{p_{\alpha_n+\lambda_n} x_n + p_{\alpha_n+\lambda_n-1}}{q_{\alpha_n+\lambda_n} x_n + q_{\alpha_n+\lambda_n-1}},$$

$p_i q_i^{-1}$ désignant la $i^{\text{ième}}$ réduite de I et de Y_n. On en conclut

$$\begin{vmatrix} q_{\alpha_n} Y_n - p_{\alpha_n} & q_{\alpha_n+\lambda_n} Y_n - p_{\alpha_n+\lambda_n} \\ q_{\alpha_n-1} Y_n - p_{\alpha_n-1} & q_{\alpha_n+\lambda_n-1} Y_n - p_{\alpha_n+\lambda_n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(3_7) \qquad R_n Y_n^2 + R'_n Y_n + R''_n = 0;$$

R_n, R'_n, R''_n sont des entiers dont la valeur absolue est limitée supérieurement en fonction de α_n, λ_n et des $\alpha_n + \lambda_n$ premiers quotients incomplets de I; on a

$$\begin{cases} R_n = q_{\alpha_n} q_{\alpha_n+\lambda_n-1} - q_{\alpha_n-1} q_{\alpha_n+\lambda_n}, \\ R''_n = p_{\alpha_n} p_{\alpha_n+\lambda_n-1} - p_{\alpha_n-1} p_{\alpha_n+\lambda_n}; \end{cases}$$

d'après la formule (4) (p. 3), $p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} = (-1)^i$, et q_i et q_{i+1} sont premiers entre eux; $q_{\alpha_n+\lambda_n}$ est premier à $q_{\alpha_n+\lambda_n-1}$, et ne peut diviser q_{α_n} qui est plus petit; donc $R_n \neq 0$. De même, $R''_n \neq 0$.

Soit Y'_n la racine de (3_7) autre que Y_n : on a

$$|Y'_n|\,|Y_n| = |R''_n R_n^{-1}| < |R''_n|,$$

(¹) Les fractions continues périodiques, simples ou mixtes, sont celles qu'on obtient en prenant pour quotients incomplets les chiffres successifs à droite de la virgule d'une fraction ordinaire périodique simple ou mixte, supposés $\neq 0$, ou, mieux encore, ces chiffres étant nuls ou non, en les remplaçant par des nombres entiers arbitraires n_1, n_2, ..., tous > 0, deux chiffres différents étant remplacés par des nombres différents, deux chiffres identiques par des nombres identiques.

puisque R_n est entier $\neq 0$, et

$$(3_7\ bis) \qquad |Y'_n| < |R''_n Y_n^{-1}| \leqq M |R''_n|,$$

où M est fini, et, si l'on veut, $\geqq 1$, puisque $|Y_n|$, aussi voisin qu'on veut de I pour n assez grand, est fini. I est évidemment la limite vers laquelle tend la suite

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_n, \quad \ldots,$$

quand n croît indéfiniment. On a [formule (13), n° 10, Chap. I]

$$|I - p_{\alpha_n+k_n\lambda_n} q^{-1}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}| < q^{-2}_{\alpha_n+k_n\lambda_n},$$

$$|Y_n - p_{\alpha_n+k_n\lambda_n} q^{-1}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}| < q^{-2}_{\alpha_n+k_n\lambda_n},$$

$$(4_7) \qquad |I - Y_n| < 2q^{-2}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}.$$

Ceci posé, je vais établir que, sous certaines conditions, I est un nombre transcendant.

Soient ξ un nombre algébrique racine d'une équation irréductible à coefficients entiers, de degré d, $f(x) = 0$, η_1 un nombre algébrique, racine d'une équation algébrique, irréductible ou non, à coefficients entiers de degré $\delta \leqq d$, $\varphi(x) = 0$, et qui soit une valeur approchée de ξ sans être racine de $f(x)$; soient $\eta_2, \ldots, \eta_\delta$ les racines de cette dernière équation autres que η_1 : je prends

$$F = B_0^d f(\eta_1) f(\eta_2) \ldots f(\eta_\delta),$$

où B_0 est le coefficient de la plus haute puissance de x dans $\varphi(x)$; F est un polynome à coefficients entiers [1] fonction des coefficients de f et de φ. Si η_1 est suffisamment voisin de ξ, pour préciser, si $|\xi - \eta_1|$ est plus petit que le module de la différence de deux racines quelconques de $f(x)$, $f(\eta_1)$ est $\neq 0$; il en est de même de $f(\eta_2), \ldots, f(\eta_\delta)$, car, si, par exemple, η_2 était racine de l'équation irréductible $f(x) = 0$, $f(x)$ diviserait $\varphi(x)$ [théorème connu [2]], et il faudrait $d > \delta$. Donc F est $\neq 0$, et, par suite, puisque F est un

(1) NIEWENGLOWSKI, *Cours d'Algèbre de Mathématiques spéciales*, t. II, 2ᵉ édit., Paris, A. Colin, 1891, p. 311.

(2) *Id.*, p. 289.

nombre entier.

$$|F| \geqq 1, \qquad |f(\eta_1)| \geqq |B_0^d f(\eta_2)\ldots f(\eta_\delta)|^{-1}.$$

On forme d'ailleurs facilement une limite supérieure du module des racines de $\varphi(x) = 0$, puis une limite supérieure Φ de $|f(\eta_2)|, \ldots, |f(\eta_\delta)|$. On en déduira

$$|f(\eta_1)| \geqq (B_0^d \Phi^{\delta-1})^{-1}.$$

Mais

$$f(\eta_1) = f(\xi + \overline{\eta_1 - \xi}) = f(\xi) + (\eta_1 - \xi) f'[\xi + \theta(\eta_1 - \xi)], \qquad 0 < \theta < 1,$$

d'où

$$(5_7) \qquad f(\eta_1) = (\eta_1 - \xi) M_1,$$

où M_1 est aussi voisin qu'on veut de $f'(\xi)$ dès que $|\eta_1 - \xi|$ est suffisamment petit par rapport au module de la différence de deux racines de $f(x)$. Donc [1]

$$(6_7) \qquad |\eta_1 - \xi| \geqq |M_1 B_0^d \Phi^{\delta-1}|^{-1}.$$

On peut ainsi assigner une limite inférieure de $|\eta_1 - \xi|$.

Ceci posé, j'admets que I soit algébrique, c'est-à-dire racine d'une équation irréductible *donnée* à coefficients entiers $f(x) = 0$. Je vais appliquer ce procédé en prenant $\xi = I$, $\eta_1 = Y_n$, $\varphi(x) = 0$ n'étant autre que l'équation (3_7), et je montrerai que, si k_n est suffisamment grand, quand on donne λ_n et α_n, on est conduit à une impossibilité. Il en résultera que I est transcendant.

Ici,

$$B_0 = R_n, \qquad F = R_n^d f(Y'_n) f(Y_n);$$

si je suppose que tous les coefficients de $f(x)$ aient leur valeur

---

(1) On arriverait à une inégalité plus precise en calculant Φ en général; on s'inspirera pour cela du Chapitre II. Il est bien entendu que, lorsqu'on appliquera cette formule, certains détails de la démonstration pourront devoir être vérifiés au point de vue de l'espèce.

Si certaines des racines de $\varphi(x)$, $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_\varpi$ par exemple, étaient égales à η_1, un calcul analogue conduit à la même inégalité, où toutefois on doit supposer $M_1 \geqq 1$, $\Phi \geqq 1$.

absolue $\leqq a'$:

$$|f(Y'_n)| \leqq a'[1 + |Y'_n| + \ldots + |Y'_n|^d] \leqq a'(d+1) M^d |R''^d_n|,$$

d'après (3_7 *bis*);

$$|I - Y_n| \geqq |M_1 a'(d+1) M^d R^d_n R''^d_n|^{-1},$$

d'après (6_7); M_1 possède d'ailleurs une limite supérieure commune M'_1 pour toutes les équations $f(x) = 0$ en nombre fini de degré $d \leqq a'$, et dont les coefficients ont leur valeur absolue $\leqq a'$; d'après (4_7), pour toutes ces équations,

$$(7_7) \qquad \frac{1}{2} q^2_{\alpha_n + k_n \lambda_n} < |M'_1 a'(a'+1) M^{a'} R^{a'}_n R''^{a'}_n|.$$

Dans le second membre de cette inégalité, tous les éléments sont déterminés dès que a', n, α_n, λ_n, les quotients de la partie non périodique et ceux de la partie périodique sont déterminés; M est aussi déterminé, car, pour n assez grand, Y_n est déterminé à une quantité près qui diffère de 0 d'aussi peu qu'on veut, et M peut être pris égal à la plus grande des quantités 1 et $2I^{-1}$, par exemple.

Dans le premier membre, au contraire, on peut disposer de Y_n de façon que $q_{\alpha_n + k_n \lambda_n}$ soit aussi grand qu'on veut. L'inégalité (7_7) est donc impossible et I n'est racine d'aucune équation algébrique irréductible dont le degré et les coefficients, entiers, sont, en valeur absolue, $\leqq a'$, a' étant arbitraire.

Si donc, pour une infinité de valeurs de n, k_n croît suffisamment vite avec n par rapport à α_n, λ_n et aux quotients incomplets, le raisonnement s'appliquera toujours pour toute valeur de a' à partir d'une certaine valeur de n, et I n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers, c'est-à-dire *est un nombre transcendant*, car (7_7) est toujours impossible dès que n est assez grand.

C. Q. F. D.

On obtient un exemple étendu de pareilles fractions continues I en partant des fractions ordinaires quasi-périodiques simples qui expriment dans le système de numération de base q'_1 première à q' les nombres

$$X = A + \sum_1^\infty \delta_n q'^{-\psi_n},$$

considérés au théorème I_7, puis prenant la fraction continue qui a pour quotients incomplets les chiffres successifs de X à droite de la virgule, X étant exprimé dans le système de base q'_1, ou encore des nombres n_1, n_2, ... correspondant à ces chiffres, de façon qu'à deux chiffres distincts correspondent des nombres distincts, à deux chiffres identiques des nombres identiques. Si ψ_n croît suffisamment vite avec n, k_n croîtra aussi vite qu'on veut et I sera transcendant.

Le nombre I ainsi obtenu est une fraction continue quasi-périodique simple, dont tous les quotients incomplets sont limités, le nombre de ceux de ces quotients qui sont distincts étant limité.

On obtiendra une fraction continue quasi-périodique, mixte en général, en prenant la fraction continue

$$I_1 = a_0 + 1 : a'_1 + \ldots - 1 : a'_p + 1 : I,$$

où $a'_0, a'_1, \ldots, a'_p$ sont des entiers fixes positifs [1]. I_1 est de la forme

$$I_1 = (PI + P')(QI + Q')^{-1},$$

et dépend effectivement de I, car

$$PQ' - P'Q = \pm 1.$$

Mais on peut former des fractions continues I' dont les quotients incomplets croissent indéfiniment.

Ainsi, je prends pour les k_1 premiers quotients l'unité, puis pour les $2k_2$ suivants 1 et 2, pour les $3k_3$ suivants 1, 2 et 3, etc. : k_n croissant suffisamment vite avec n, on peut prendre

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = k_1, \qquad \ldots, \qquad \alpha_3 = k_1 + 2k_2, \qquad \ldots.$$
$$\alpha_n = k_1 + 2k_2 + \ldots + (n-1)k_{n-1}, \qquad \ldots,$$
$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \ldots. \qquad \lambda_n = n, \qquad \ldots.$$

Il est bien évident que, pour une croissance suffisamment rapide de k_n avec n, l'inégalité (7_7) sera impossible; il est bien évident aussi, puisque les quotients incomplets croissent indéfiniment, que I' n'est pas une fraction continue périodique ordinaire, qui serait racine

---

(1) Il suffira pour cela que les nombres $a'_0, \ldots, a'_p$ soient distincts des nombres $n_1, n_2, \ldots$.

d'une équation algébrique du deuxième degré à coefficients entiers [1]; I' est un nombre transcendant.

On en déduira encore des fractions quasi-périodiques mixtes analogues

$$I'_1 = a'_0 + 1 : a'_1 + \ldots + 1 : a'_p + 1 : I'.$$

Au lieu de prendre pour périodes 1, puis 1, 2, puis 1, 2, 3, etc., on pourra prendre, par exemple, c_1, puis c_1, c_2, puis c_1, c_2, c_3, etc., les nombres entiers c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ... étant distincts et constamment croissants [2].

On remarquera que les fractions continues quasi-périodiques sont des nombres transcendants qui peuvent être distincts des nombres transcendants de Liouville. Il en est ainsi en particulier quand les quotients incomplets sont tous limités, ou quand le $i^{\text{ième}}$ quotient incomplet est inférieur à i^λ (λ fixe positif quelconque) d'après la formule (3_6) (p. 124). C'est le cas des nombres transcendants I, I_1, I', I'_1 que l'on vient de former.

Enfin on observera que, d'après la forme de leur développement en fraction continue (Chap. VI, p. 123), $\frac{e^{q^{-1}}+1}{e^{q^{-1}}-1}$, où q est entier $\geqq 1$, n'est pas quasi-périodique, car les quotients incomplets a_n croissent constamment et indéfiniment avec n.

On peut encore se demander si $J = pq^{-1}I$ est quasi-périodique quand I l'est et que pq^{-1} est rationnel avec p, q entiers > 0.

On remarquera que $pq^{-1}(I - Y_n)$ est aussi petit qu'on veut, dès que k_n est assez grand par rapport à λ_n et α_n. D'après (3_7), $Z_n = pq^{-1}Y_n$ est d'ailleurs racine d'une équation du deuxième degré

$$q^2 R_n Z_n^2 + pq R'_n Z_n + p^2 R''_n = 0,$$

analogue à (3_7). On sait [3] que Z_n est une fraction continue périodique dont la période a au plus $2A' = \frac{p^2q^2}{2}(R'^2_n - 4R_nR''_n)$ termes, et que les quotients incomplets sont $< 2\sqrt{A'} = pq\sqrt{R'^2_n - 4R_nR''_n}$;

---

(1) Propriété connue, qui se vérifie, comme on l'a vu, à propos de l'équation (3_7).

(2) Le cas échéant, il pourra être utile de consulter l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1904, p. 83-84.

(3) SERRET, *Algèbre supérieure*, 5e édit., t. I, 1885, p. 38, 44, 45.

R_n, R'_n, R''_n ne dépendant pas de k_n, quand I est donné, on voit que, si k_n est assez grand par rapport à λ_n et α_n, $|J - Z_n|$ étant aussi petit qu'on veut, J a avec Z_n autant de périodes communes qu'on veut. Donc, si k_n croît suffisamment vite avec n par rapport à λ_n et α_n, $pq^{-1}I$ est aussi quasi-périodique.

Ces résultats restent vrais pour J et Z_n quels que soient p et q quand on prend pour p et q toutes les valeurs $\leqq n$. On peut donc conclure :

Si k_n croît suffisamment vite avec n, par rapport à α_n et λ_n, $pq^{-1}I$ est quasi-périodique, quels que soient les entiers p et q. Il en est de même de $\frac{M'I + N'}{MI + N}$, *quand* $MN' - NM' \neq 0$.

Un raisonnement analogue s'applique à I^p (p entier $\leqq n$), plus généralement à toute fonction rationnelle $J' = \psi(I)$ à coefficients entiers en valeur absolue $\leqq n$ et de degré $\leqq n$ formée avec I, et qui est évidemment un nombre transcendant. En effet, si $U_n = \psi(Y_n)$, $|J' - U_n|$ est aussi petit qu'on veut dès que n et k_n sont assez grands. U_n est racine d'une équation du second degré

$$U_n^2 - U_n[\psi(Y_n) + \psi(Y'_n)] + \psi(Y_n)\psi(Y'_n) = 0,$$

qui est de la forme

$$S_n U_n^2 + S'_n U_n + S''_n = 0,$$

équation analogue à (3_7), S_n, S'_n, S''_n étant entiers. S_n, S'_n, S''_n ont leurs modules limités en fonction de n, R_n, R'_n, R''_n.

Cette équation est ou non irréductible.

Si elle est réductible pour une infinité de valeurs n_1 de n, c'est-à dire si $U_{n_1} = \psi(Y_{n_1})$ est rationnel pour une infinité de valeurs n_1 de n, on peut prendre k_n assez rapidement croissant pour que $|J' - U_{n_1}|$ soit aussi petit qu'on veut en fonction de n_1, en particulier pour que la suite des quantités rationnelles U_{n_1} soit une suite de Liouville : J' est alors un nombre transcendant de Liouville.

Si cette équation est irréductible pour une infinité de valeurs n_1 de n, U_{n_1} a un développement en fraction continue périodique pour lequel les quotients incomplets et le nombre de ces quotients par période sont limités en fonction de n_1 ; lorsque k_n croît assez vite avec n, U_{n_1} a autant de périodes communes qu'on veut avec J' et J' est une fraction continue quasi-périodique. Donc, en résumé :

THÉORÈME IV$_7$. — *Si k_n croît suffisamment vite avec n par rapport à α_n et λ_n : 1° les quantités* $(MI + N)(M'I + N')^{-1}$, *avec* $MN' - NM' \neq O$, M, N, M', N' *entiers quelconques, ont toutes leur développements en fraction continue quasi-périodique; 2° toute fraction rationnelle de* I, $\psi(I)$, *à coefficients entiers, est un nombre de Liouville* (¹) *ou une fraction continue quasi-périodique.*

Dans le cas particulier où $\psi(I) = I^p$, soit $\psi(Y_n)$ rationnel et $= \rho$; $Y_n^p - \rho = 0$ et $R_n Y_n^2 + R'_n Y_n + R''_n = 0$ ont une racine commune; la deuxième équation est irréductible, puisque Y_n est une véritable irrationnelle quadratique; la première équation admet pour racine Y'_n, forcément $\neq Y_n$ et réel comme Y_n : donc p est pair et $Y_n = - Y'_n$, $R'_n = 0$. On sait qu'alors, en supposant $I > 0$, la condition $R'_n = 0$ entraîne, avec mes notations, $\alpha_n \leqq 0$ (²). On voit donc que I^p est une fraction continue quasi-périodique quand p est impair, ou quand, p étant pair, α_n est > 0 pour une infinité de valeurs de n; donc :

En général, I^p *est une fraction continue quasi-périodique.*

On voit en même temps que, si I une fraction continue quasi-périodique, et

$$I' = a'_0 + 1 : a'_1 + \ldots + 1 : a'_{p'} + 1 : I,$$

I'^p est en général une fraction analogue dès que $p' \geqq 1$, pourvu que les a'_i soient choisis convenablement (*voir* plus haut, p. 136-137).

Extensions probables. — Les théories de ce Chapitre paraissent susceptibles d'extensions; dans l'état actuel de la théorie des fractions continues, celles-ci semblent difficiles; je me contenterai de l'indication suivante, un peu vague : les racines des équations du second degré à coefficients entiers sont ou des nombres rationnels (fractions continues limitées) ou des irrationnelles quadratiques (fractions continues périodiques). Si l'on peut, par un procédé quelconque, sur-

---

(¹) Ce cas peut se présenter (*voir* Note II à la fin du Volume).

(²) Je demanderai qu'on admette ce résultat : on en trouvera une démonstration dans l'*Algèbre supérieure* de Serret (*loc. cit.*, p. 48 et 55); on doit noter que Serret compte le terme a_0 parmi les termes périodiques ou non périodiques suivant les cas, par suite $\alpha_n + 1$ termes non périodiques.

tout par un développement en fraction continue, définir des quantités racines d'équations du troisième, quatrième, ... degré à coefficients entiers, c'est-à-dire des irrationnelles cubiques, biquadratiques, etc., il semble possible qu'on en déduise des nombres quasi-cubiques, quasi-biquadratiques, etc., comme on a déduit du développement en fraction continue des irrationnelles quadratiques des fractions continues quasi-périodiques, c'est-à-dire des nombres quasi-quadratiques [1].

Enfin, on pourra chercher à définir des nombres transcendants à l'aide de la représentation des nombres sous forme de radicaux superposés indiquée par M. P. Wiernsberger [2]. Les procédés analogues à ceux appliqués dans cet Ouvrage pour faire dériver les fractions décimales et les fractions continues quasi-périodiques des fractions décimales et des fractions continues périodiques seraient à essayer pour les radicaux superposés.

---

(1) Le sens des mots quasi-quadratiques, quasi-cubiques, etc. me semble suffisamment précis dans l'espèce : ces mots sont d'ailleurs assez suggestifs par eux-mêmes.

Peut-être pourrait-on s'inspirer d'idées ingénieuses de M. R. de Montessus (*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1897, p. 42), ou encore des beaux travaux de M. Minkowski (*Göttinger Nachrichten*, 1899, p. 64).

(2) *Comptes rendus*, 28 déc. 1903, p. 1233; 6 juin 1904, p. 1401; *Journal für Mathematik* (Crelle), 1905, t. CXXX, p. 144.

Comme exemple de fraction continue I quasi-périodique, dont les quotients incomplets sont limités et $\leqq r$, on peut citer celles obtenues en prenant, pour la suite s_n, k_n quotients incomplets égaux à $r_1 \leqq r (\lambda_n = 1)$, les $\alpha_n + 1$ quotients incomplets de la partie non périodique correspondante étant formés de la partie non périodique ($\alpha_{n-1} + 1$ quotients) qui précède s_{n-1} dans I, des k_{n-1} quotients de s_{n-1} et du quotient $a_{\alpha_n} = r_2 \neq r_1$, avec $r_2 \leqq r$: pour que I soit transcendant, il suffit, d'après (7)

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + k_{n-1} + 1, \qquad k_n \alpha_n^{-1} > \varpi,$$

pour une infinité de valeurs de n, si grand que soit ϖ. Il suffira alors que la suite des k_n soit d'ordre > (2.0) dans la première classification des suites $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ (Note II à la fin du Volume). On formera facilement d'autres exemples analogues.

CHAPITRE VIII.

QUELQUES PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES RACINES DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

Je vais me contenter d'indiquer ici deux propriétés des racines des séries à coefficients rationnels.

THÉORÈME I_8. — *Soit la fonction quasi-entière*

$$(1_8) \qquad F(z) = \sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} + \sum_0^\infty c_n^{(0)} x^{-\varpi_n^{(0)}} + \sum_0^\infty c_n^{(1)} (x - a_1)^{-\varpi_n^{(1)}},$$

où les coefficients et a_1 *sont rationnels* $\neq 0$, *les* ϖ_i, ϖ_i^0 *et* $\varpi_i^{(1)}$ *étant entiers,*

$$c_n = s_n t_n^{-1}, \quad c_n^{(0)} = s_n^{(0)} t_n^{(0)-1}, \quad c_n^{(1)} = s_n^{(1)} t_n^{(1)-1} \quad (s_n, \ldots, t_n, \ldots \text{ entiers}),$$

avec

$$|s_n| \leqq \sigma_n, \quad |s_n^{(0)}| \leqq \sigma_n^{(0)}, \quad |s_n^{(1)}| \leqq \sigma_n^{(1)}.$$

Les σ_n, $\sigma_n^{(0)}$, $\sigma_n^{(1)}$ *étant donnés en fonction de n, on peut toujours, pour toutes les fonctions* F *où les s satisfont aux conditions ci-dessus, choisir un mode de croissance convenable assez rapide de* t_n, $t_n^{(0)}$, $t_n^{(1)}$ *pour que les fonctions* F *n'aient aucune racine algébrique, autrement dit pour que* $F(\zeta)$ *soit transcendant dès que* ζ *est algébrique, réel ou imaginaire* (¹).

Je ne reproduis pas la démonstration de ce théorème qu'on trou-

(¹) Quand $F(z)$ est une fonction entière, on exclut bien entendu la valeur $x = 0$. Il est bien évident, d'après la démonstration, qu'une propriété semblable, avec une démonstration identique, a lieu pour les fonctions obtenues en ajoutant à $F(z)$ un nombre fini de séries analogues à la dernière du deuxième membre de (1_8), les $c_n^{(i)}$ et les a_i étant rationnels et satisfaisant à des conditions analogues.

vera dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXX, 1902, p. 147, et qui est très abordable. On doit remarquer ici que chacun des nombres t_{n+1}, $t_{n+1}^{(0)}$, $t_{n+1}^{(1)}$ doit, pour qu'il y ait impossibilité d'une racine algébrique : 1° être pris supérieur à une certaine limite fonction des t_j, $t_j^{(0)}$, $t_j^{(1)}$, σ_j, $\sigma_j^{(0)}$, $\sigma_j^{(1)}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ et de n; 2° être choisi d'une manière convenable, par exemple de façon que t_{n+1} soit suffisamment plus petit que $t_{n+1}^{(0)}$ et $t_{n+1}^{(1)}$ (¹).

Dans le cas où $F(z)$ est une fonction entière, ce théorème est une conséquence des considérations du Chapitre V, théorème I_5, p. 100. En effet, si c_n^{-1} croît suffisamment vite avec n, et si l'on prend

$$\sum_0^n c_n = P_n Q_n^{-1},$$

on a

$$c_{n+1} = P_{n+1} Q_{n+1}^{-1} - P_n Q_n^{-1};$$

$|F(1) - P_n Q_n^{-1}|$ est, si l'on choisit t_n croissant assez vite avec n, $< Q_n^{-\alpha}$, où α peut être pris aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand : $F(z)$ est une des fonctions $f(z)$ du théorème I_5, car $F(1)$ est transcendant.

On a vu dans le Chapitre V (p. 105) que les séries

$$\sum_0^\infty a_n b_k(n)^{-\rho n} x^n,$$

(¹) J'insiste sur ce dernier point que ma démonstration ne précise pas. Celle-ci suppose, d'après les notations qui y sont adoptées, $\varepsilon_n \neq 0$ pour une infinité de valeurs de n, ce qui permet de trouver une limite inférieure de $|\Phi(F_n)|$. Si le contraire a lieu, c'est-à-dire si $\varepsilon_n = 0$ à partir d'une certaine valeur N de n,

$$(2_8) \qquad \begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = \ldots = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \ldots = 0, \\ c_{n+1}\zeta^{\varpi_{n+1}} + c_{n+1}^{(0)}\zeta^{-\varpi_{n+1}^{(0)}} + c_{n+1}^{(1)}(\zeta - a_1)^{-\varpi_{n+1}^{(1)}} = 0, \end{cases}$$

pour $n \geqq N$. Ceci est bien impossible quand deux des séries du deuxième membre de $F(z)$ sont nulles identiquement, à moins que ce soient les deux dernières et que $\zeta = 0$; si non, on en déduit une infinité de relations entre les coefficients c_{n+i}, $c_{n+j}^{(0)}$, $c_{n+l}^{(1)}$. Mais on arrive à une impossibilité absolue et à l'énoncé du théorème en choisissant convenablement la croissance des t_n, $t_n^{(0)}$, $t_n^{(1)}$: ainsi, on pourra prendre $c_n^{(0)} c_n^{-1}$, $c_n^{(1)} c_n^{-1}$ décroissant assez rapidement quand n croît; alors les racines de (2_8) tendent toutes vers 0 quand n croît indéfiniment, et les équations (2_8) n'ont aucune racine commune : $F(\zeta)$ est bien transcendant quand ζ est algébrique, réel ou imaginaire (on excepte la valeur $\zeta = 0$).

qui, pour des valeurs convenables des a_n, peuvent, d'après le Chapitre IV (théorème II_1 et formules qui suivent, p. 69) prendre des valeurs rationnelles ou algébriques pour des valeurs rationnelles ou algébriques $\neq 0$ de x, ne jouissaient certainement pas de cette dernière propriété quand $|a_{n+1}| \leqq b_k(n)^\tau$, τ étant un nombre positif arbitraire. Il en résulte que les séries qui remplissent ces dernières conditions n'ont pas de racines rationnelles ni de racines algébriques autres que zéro. Ceci est d'accord avec le théorème I_8.

On peut aller plus loin dans cette voie et établir le théorème suivant :

Théorème II_8. — *Soit la fonction entière à coefficients rationnels*

$$F(z) = \sum_0^\infty c_n z^n;$$

$$c_n = s_n t_n^{-1} \neq 0, \qquad |s_n| \leqq \sigma_n,$$

où σ_n est une fonction donnée de n, s_n et t_n sont des entiers, s_n est positif ou négatif. Je suppose que $F(z)$ *admette* (¹) *pour racine réelle un nombre de Liouville.*

La rapidité de croissance des dénominateurs Q_i des réduites de ce nombre avec i est limitée en fonction de celle des $|c_n^{-1}|$ ou des $t_n \sigma_n^{-1}$ avec n (²) *lorsque cette dernière n'est pas trop lente.*

En effet, il suffit de prouver que, σ_n et t_n étant donnés, un nombre I de Liouville d'ordre suffisamment grand (au sens du Chapitre I, n° 10, *voir* encore Note II à la fin du Volume) ne peut être racine de $F(z)$.

Je suppose que I soit la limite d'une suite ($1'_3$) de fractions (p. 27); ces fractions sont des réduites de I; soit $I_i = P_i Q_i^{-1}$ une d'entre elles, $i^{\text{ième}}$ réduite de I, et telle que, dès que i est assez grand, par hypothèse,

$$I = I_i + \mu_i Q_{i+1}^{-1} = I_i + \eta_i, \qquad Q_{i+1} > Q_i^{2^i},$$

(¹) On sait qu'il y a une variété indéfinie de pareilles fonctions, d'après le Chapitre IV.

(²) Ce qui fait l'importance de ce théorème, c'est qu'il est applicable à toutes les fonctions $F(z)$ telles que $|s_n| \leqq \sigma_n$, dès que les σ_n, t_n sont donnés. L'ensemble (au sens de M. Cantor) de ces fonctions a la puissance du continu.

Je suppose que, à partir d'une certaine valeur de n, t_n et $|c_n^{-1}|$ soient toujours croissants et croissent assez vite.

où $|\mu_i|$ est limité supérieurement et $\leqq \mu$. Comme exemple de pareils nombres, je citerai les nombres de la Remarque III du Chapitre III, p. 40, où $k > 1$. Soit

$$S_n = F_n(I) = \sum_0^n c_m I^m \neq 0, \qquad F(I) = S_n + T_n = 0;$$

on a, si c_{n+j} est le premier [1] des coefficients c_{n+1}, c_{n+2}, ... qui soit $\neq 0$, c'_n la valeur absolue de c_n,

$$T_n = c_{n+j} I^{n+j} + \ldots, \qquad |T_n| \leqq 2 c'_{n+j} I^{n+j},$$

la décroissance des $|c_n|$ étant suffisamment rapide dès que n est assez grand, et

$$S_n = \sum_0^n c_m I_i^m + U_n \eta_i,$$

avec

$$U_n \eta_i = F_n(I) - F_n(I_i) = \eta_i^k F_n^{(k)}(I_i + \theta \eta_i), \qquad 0 < \theta < 1,$$

$|U_n| \leqq M$, M étant limité supérieurement. Dès lors

$$0 = S_n + T_n = \sum_0^n s_m t_m^{-1} I_i^m + \eta_i U_n + T_n = p_n (t_0 \ldots t_n Q_i^n)^{-1} + \eta_i U_n + \lambda_n c_{n+j} I^{n+j},$$

où $|\lambda_n| \leqq 2$.

Si $p_n = 0$, p_{n+j} est $\neq 0$; à condition de poser au besoin $n + j = n_1$, puis de remplacer n_1 par n, je puis admettre que p_n est $\neq 0$, donc que $|p_n| \geqq 1$. On doit avoir alors

$$|\eta_i U_n + \lambda_n c_{n+j} I^{n+j}| = |p_n| \, |t_0 \ldots t_n Q_i^n|^{-1} \geqq (t_0 \ldots t_n Q_i^n)^{-1},$$

et, *a fortiori*,

$$(3_8) \qquad M \mu Q_{i+1}^{-1} + 2 \sigma_{n+j} t_{n+j}^{-1} I^{n+j} \geqq (t_0 \ldots t_n Q_i^n)^{-1}$$

en remplaçant $|\eta_i U_n|$ et $|\lambda_n c_{n+j} I^{n+j}|$ par leurs limites supérieures.

---

[1] Ce n'est qu'à la fin de la démonstration que je ferai, conformément à l'énoncé du théorème, la restriction $j = 1$: la portée de la démonstration est plus étendue que le ferait penser l'énoncé. Je suppose ici I positif, ce qui est toujours permis, car il suffit de choisir en conséquence les signes des s_n.

Ceci posé, les t_n et les Q_i étant donnés, je prends, pour une valeur donnée de i assez grande, la plus petite valeur ν_i de n telle que

$$Q_i^n \leqq t_0 \ldots t_n \tag{4_8}$$

quand $n \geqq \nu_i$. Il y en a toujours une dès que $t_n > \beta^n$, pour n assez grand, quel que soit le nombre fixe β. On a en même temps

$$Q_i^n > t_0 \ldots t_n \tag{5_8}$$

quand $n < \nu_i$. En effet, si $Q_i^\nu \leqq t_0 \ldots t_\nu$, i étant assez grand et les t_n constamment croissants au moins à partir d'une certaine valeur n' de n, il faut $t_\nu \geqq Q_i$ ($t_0 t_1$ et $t_{n'}$ sont, si l'on veut, $< Q_i$); donc $Q_i^{\nu+l} \leqq t_0 \ldots t_\nu \ldots t_{\nu+l}$ *a fortiori* ($l = 1, 2, \ldots$). Parmi les valeurs de $n \geqq \nu_i$, je prends la plus petite $\nu_i + l_i$ telle que p_n soit $\neq 0$. La formule (3_8) est applicable à cette valeur de n, et l'on n'a pas à la fois

$$\left\{\begin{aligned} 2M\mu Q_{i+1}^{-1} &< (t_0 \ldots t_n Q_i^n)^{-1}, \\ 4\sigma_{n+j} t_{n+j}^{-1} I^{n+j} &< (t_0 \ldots t_n Q_i^n)^{-1}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned} 2M\mu t_0 \ldots t_n Q_i^n &< Q_{i+1}, \\ 4\sigma_{n+j} I^{n+j} t_0 \ldots t_n Q_i^n &< t_{n+j}; \end{aligned}\right. \tag{6_8}$$

ou encore quand $n = \nu_i + l_i$, d'après (4_8), *a fortiori*, l'on n'a pas à la fois

$$\left\{\begin{aligned} 2M\mu (t_0 \ldots t_n)^2 &< Q_{i+1}, \\ 4\sigma_{n+j} I^{n+j} (t_0 \ldots t_n)^2 &< t_{n+j}. \end{aligned}\right.$$

La seconde inégalité a toujours lieu quand n est assez grand, les σ_n étant donnés, si les nombres $t_n \sigma_n^{-1}$ croissent assez vite avec n. Par conséquent la première inégalité ne doit pas avoir lieu, c'est-à-dire qu'il faut

$$Q_{i+1} \leqq 2M\mu (t_0 \ldots t_{\nu_i + l_i})^2. \tag{7_8}$$

Une fois que les t_n et les σ_n sont fixés, si l'on se donne une limite supérieure fonction de n de la différence j entre les indices de deux coefficients s_n consécutifs $\neq 0$, par exemple si l'on spécifie que $j \leqq \gamma$, on a $l_i \leqq \gamma$, et (7_8) donne une limite supérieure de Q_{i+1}. Par conséquent la croissance des Q_i avec i ne peut être trop rapide, une fois

que l'on s'est donné les σ_n, les t_n et une limite supérieure fonction de n du nombre des termes nuls de $F(z)$ qui suivent le $(n+1)^{\text{ième}}$.

Le théorème en résulte de suite si l'on fait $\gamma = 1$ et si l'on suppose que les I_i sont des réduites *consécutives*. Il est bien évident alors que, si les Q_i croissent très rapidement avec i, il faudra que les $t_n \sigma_n^{-1}$ jouissent de la même propriété avec n. C. Q. F. D.

Cette démonstration comporte d'autres conséquences intéressantes : je suppose qu'une racine réelle soit de la forme indiquée au théorème I_7,

$$I = A + \sum_1^\infty \delta_n q^{-\psi_n}$$

(A positif ou négatif) : les t_n et σ_n étant donnés, t_n et σ_n^{-1} croissant assez vite avec n, ψ_n ne peut croître relativement trop vite : *le nombre des zéros de* I *qui suivent le* $m^{\text{ième}}$ *chiffre est limité supérieurement en fonction de m pour l'ensemble des fonctions* $F(z)$ *correspondantes.*

De même, *les quotients incomplets du développement en fraction continue des racines réelles de ces fonctions* $F(z)$ *ont leur croissance limitée dans les mêmes conditions.*

Enfin, je signalerai que les équations

$$F(z) = \sum_0^\infty c_n z^{\varpi_n} = 0, \qquad F_1(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^{\varpi_n} = 0,$$

où les c_n sont réels et donnés absolument quelconques (F et F_1 convergeant) jouissent dans le domaine de convergence de propriétés similaires, quand les entiers positifs ϖ_n, $-\varpi_{-n}$ croissent suffisamment vite avec n par rapport aux $|c_n^{-1}|$ (¹).

(¹) On trouvera à cet égard des indications suffisantes par exemple dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques : Sur les racines des équations transcendantes,* 1901, p. 422-435; comparer *Comptes rendus,* 1901, 2ᵉ semestre, p. 1192, et *Acta Mathematica,* 1905, p. 303.

Il serait intéressant de chercher à traiter les matières de ce Chapitre VIII au point de vue plus précis de la Note II à la fin du Volume.

CHAPITRE IX.

TRANSCENDANCE DE e ET π. — IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE.

Il n'est pas possible de faire une *Introduction à la théorie des nombres transcendants* sans parler des mémorables recherches d'Hermite et de M. Lindemann, lesquelles ont établi que les nombres e (Hermite) et π (Lindemann) sont transcendants.

Diverses démonstrations assez simples de ces propriétés ont été publiées, dues à Stieltjes et à MM. D. Hilbert, A. Hurwitz, P. Gordan [1], Rouché [2], etc. Je vais indiquer ici celle du *Cours lithographié de l'École Polytechnique* de M. Jordan [3] pour e, celle de M. Hilbert pour π. Je montrerai qu'on peut en conclure l'impossibilité de la quadrature du cercle.

Transcendance de e.

Théorème I_9. — *Le nombre e est transcendant.*

Soit P un polynome entier en x; on a, en intégrant par parties,

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^m P e^{-x}\,dx - \int_0^m P' e^{-x}\,dx = (-P e^{-x})_0^m, \\ \displaystyle\int_0^m P' e^{-x}\,dx - \int_0^m P'' e^{-x}\,dx = (-P' e^{-x})_0^m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Si l'on continue jusqu'à ce qu'on trouve une dérivée $P^{(k)}$ nulle, et

(1) *Comptes rendus*, 10 février 1890, p. 267; *Math. Ann.*, t. XLIII, 1893, p. 216, 220, 222.

(2) *Géométrie*, de MM. Rouché et Comberousse, t. II, Paris, Gauthier-Villars.

(3) Analogue d'ailleurs à celle de M. Hilbert pour e et π. Je ne puis ici que renvoyer aux recherches de M. Hensel sur la théorie des nombres transcendants; je n'en connais encore qu'un résumé (*Jahresbericht der D. Math. Vereinigung*, novembre-décembre 1905, p. 545 et suiv.) : les résultats annoncés paraissent importants et pleins de promesses.

si l'on pose

$$(1_9) \qquad P + P' + P'' + \ldots = F(x),$$

on a, en additionnant membre à membre,

$$(1_9\, bis) \qquad \int_0^m P e^{-x}\, dx = -\Big[e^{-x} F(x)\Big]_0^m = F(0) - e^{-m} F(m),$$

ou

$$(2_9) \qquad e^m \int_0^m P e^{-x}\, dx = -F(m) + e^m F(0).$$

Je suppose alors que e ne soit pas transcendant, c'est-à-dire soit racine d'une équation algébrique à coefficients entiers,

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + \ldots + c_n e^n = 0, \qquad c_0 \neq 0;$$

je donne successivement à m dans la formule (2_9) les valeurs 0, 1, 2, ..., n, et j'additionne les égalités obtenues en multipliant les deux membres respectivement par $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Il vient

$$(3_9) \qquad \sum_0^n c_m e^m \int_0^m P e^{-x}\, dx = -\sum_0^n c_m F(m).$$

Pour démontrer le théorème, il me suffira d'établir l'impossibilité de cette égalité pour une valeur particulière du polynome P; je prendrai

$$P(x) = x^{p-1}(x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-n)^p [(p-1)!]^{-1},$$

où p est un nombre premier suffisamment grand et $> n$; j'établirai que, pour une valeur convenable de p, le premier membre de (3_9) est < 1 en valeur absolue, tandis que le second membre est un entier $\neq 0$.

1° En effet, quand $0 \leqq x \leqq n$, $e^{-x} \leqq 1$, et $|x-k| \leqq n$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, ou n; donc

$$|P e^{-x}| \leqq n^{np+p-1}[(p-1)!]^{-1};$$

$$\left| c_m e^m \int_0^m P e^{-x}\, dx \right| \leqq |c_m| e^m n^{np+p-1}[(p-1)!]^{-1} (x)_0^m$$
$$\leqq |c_m| e^m n^{(n+1)p}[(p-1)!]^{-1},$$

$$\left| \sum_0^n c_m e^m \int_0^m P e^{-x}\, dx \right| \leqq e^n \Big(\sum |c_n|\Big) n^{(n+1)p}[(p-1)!]^{-1}$$
$$\leqq c(n^{n+1})^{p-1}[(p-1)!]^{-1},$$

en posant

$$c = e^n \left(\sum |c_m| \right) n^{n+1}.$$

Soit $p > \lambda = 2n^{n+1} = 2\mu$; on a

$$(4_9) \quad (n^{n+1})^{p-1}[(p-1)!]^{-1} = \mu^\lambda(\lambda!)^{-1}\mu(\lambda+1)^{-1}\mu(\lambda+2)^{-1}\ldots\mu(\lambda+p-\lambda-1)^{-1} < \mu^\lambda(\lambda!)^{-1}2^{-(p-\lambda-1)}.$$

Cette dernière quantité est $< (2c)^{-1}$ dès que p est assez grand, et, par suite, le premier membre de (3_9) a alors sa valeur absolue $< \frac{1}{2}$.

2° Le développement de P suivant les puissances croissantes de x est de la forme

$$P = [(-1)^{np}(n!)^p x^{p-1} + \nu_0 x^p + \nu_1 x^{p+1} + \ldots][(p-1)!]^{-1},$$

$\nu_0, \nu_1, \ldots$ étant des nombres entiers. Pour $x = 0$, P et ses $p-2$ premières dérivées sont nulles; les suivantes ont les valeurs

$$(4_9\ bis) \quad \begin{cases} P^{(p-1)}(0) = (-1)^{np}(n!)^p, & P^{(p)}(0) = \nu_0 p, \\ P^{(p+1)}(0) = \nu_1 p(p+1), & \ldots. \end{cases}$$

A partir de $P^{(p)}(0)$, leurs valeurs sont des entiers divisibles par p, jusqu'à $P^{[(n+1)p]}(0)$ qui est nul. Dès lors, si l'on prend p premier $> |c_m|$ ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$), comme p est $> n$, $(n!)^p$ est premier à p, et $c_0\,F(0)$ est premier à p, d'après (1_9).

Pour $x = m > 0$, $P(x)$ étant de la forme

$$P(m + \overline{x - m}) = [\rho_0(x-m)^p + \rho_1(x-m)^{p+1} + \ldots][(p-1)!]^{-1},$$

où $\rho_0, \rho_1, \ldots$ sont des entiers, les $p-1$ premières dérivées de P s'annulent pour $x = m$; les suivantes prennent les valeurs $\rho_0 p$, $\rho_1 p(p+1), \ldots$, entiers divisibles par p. Par conséquent $\sum_1^n c_m F(m)$ sera un entier divisible par p, et $\sum_0^n c_m F(m)$ un entier non divisible par p, par suite un entier $\neq 0$; il en est de même du second membre de (3_9). C. Q. F. D.

Transcendance de π.

Théorème II$_9$. — *Le nombre π est transcendant.*

Je suppose que π soit un nombre algébrique, c'est-à-dire racine d'une équation algébrique à coefficients entiers : il en sera de même de $\alpha_1 = i\pi = \pi\sqrt{-1}$: soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation irréductible à coefficients entiers réels dont α_1 est racine. On a

$$e^{\alpha_1} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$(5)\qquad (1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\ldots(1+e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_\nu} = 0.$$

Les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ sont les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers, $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_\nu) = 0$, qui peut ne pas être irréductible ; si quelques-uns d'entre eux sont nuls, les μ autres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$ étant $\neq 0$, ces derniers sont racines d'une équation algébrique à coefficients entiers de degré μ

$$f(z) = c_0 z^\mu + c_1 z^{\mu-1} + \ldots + c_\mu = 0,$$

avec $c_\mu \neq 0$, et

$$(6)\qquad 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_\nu} = a + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_\mu} = 0,$$

où a est un entier *positif* > 0.

Je multiplie les deux membres par

$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^{p-1}[g(z)]^p e^{-z}\,dz,$$

où p est un nombre premier suffisamment grand, et

$$g(z) = c_0^\mu f(z).$$

Je pose

$$(7)\qquad \begin{cases} P_1 = a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + \ldots + e^{\beta_\mu}\int_{\beta_\mu}^\infty, \\ P_2 = e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_\mu}\int_0^{\beta_\mu} ; \end{cases}$$

ici $\int_0^{\beta_j}$ est l'intégrale prise dans le plan complexe des z le long de la droite joignant l'origine au point β_j ; $\int_{\beta_j}^\infty$ est l'intégrale prise le long d'une parallèle à l'axe réel allant de β_j à $+\infty$. Il est bien évident,

d'après un théorème fondamental de Cauchy sur la valeur d'une intégrale de variable imaginaire le long d'un contour, que

$$\int_0^{\beta_1} + \int_{\beta_1}^{\infty} = \int_0^{\beta_2} + \int_{\beta_2}^{\infty} = \ldots = \int_0^{\infty},$$

où $\int_0^{\infty}$ est la valeur de l'intégrale prise le long de l'axe réel, car le module de

$$z^{p-1}[g(z)]^p e^{-z}$$

le long d'un arc de cercle de rayon infiniment grand, où la partie réelle de z est positive, est plus petit que le module de z^{-2} (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*).

D'après (6_0), (7_0) donne alors

$$(8_0) \qquad P_1 + P_2 = 0.$$

Pour établir qu'il est absurde de supposer π algébrique, il suffira, d'après (8_0), de montrer que, pour un choix convenable de p, $P_1[(p-1)!]^{-1}$ a son module entier $\neq 0$, et $P_2[(p-1)!]^{-1}$ son module < 1.

1° Je m'occupe de P_1 et je considère

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{\infty} x^{p-1}[g(x)]^p e^{-x}\,dx \qquad (x \text{ réel});$$

on a

$$\begin{aligned} x^{p-1}[g(x)]^p &= x^{p-1}(c_0^{\mu+1}x^{\mu} + c_1 c_0^{\mu} x^{\mu-1} + \ldots + c_{\mu} c_0^{\mu})^p \\ &= c_{\mu}^p c_0^{\mu p} x^{p-1} + \rho_0 x^p + \rho_1 x^{p+1} + \ldots, \end{aligned}$$

où $\rho_0, \rho_1, \ldots$ sont des entiers;

$$(9_0) \qquad \int_0^{\infty} = \int_0^{\infty} x^{p-1}[g(x)]^p e^{-x}\,dx = c_{\mu}^p c_0^{\mu p}(p-1)! + \rho p!,$$

où ρ est entier, d'après $(1_0\ bis)$ et un raisonnement identique à celui qui a conduit à $(4_0\ bis)$.

Je considère $\int_{\beta_j}^{\infty}$: si $z = x' + \beta_j$,

$$e^{\beta_j}\int_{\beta_j}^{\infty} = \int_0^{\infty} (x' + \beta_j)^{p-1}[g(x' + \beta_j)]^p e^{-x'}\,dx'.$$

Or

$$g(x'+\beta_j) = g(\beta_j) + x' g'(\beta_j) + \ldots \qquad [\text{avec } g(\beta_j) = 0];$$

dans cette formule, les coefficients des puissances de x' sont des polynomes en β_j de degré $\leqq \mu - 1$, à coefficients entiers tous multiples de c_0^μ;

$$(x'+\beta_j)^{p-1}[g(x'+\beta_j)]^p = \sigma_0 x'^p + \sigma_1 x'^{p+1} + \ldots,$$

où σ_0, σ_1, ... sont des polynomes en β_j à coefficients entiers tous multiples de $c_0^{\mu p}$; le degré en x' est $< p(\mu+1)$, celui de $\beta_j < \mu p$.

x' étant réel,

$$J_q = \int_0^\infty x'^q e^{-x'} dx' = q!,$$

d'après (1_9 *bis*) et une formule analogue à (4_9 *bis*);

$$(10_9) \qquad e^{\beta_j} \int_{\beta_j}^\infty = p!\, G(\beta_j),$$

où $G(\beta_j)$ est un polynome en β_j, de degré $< \mu p$ en β_j et de coefficients entiers tous multiples de $c_0^{\mu p}$.

$$G(\beta_1) + G(\beta_2) + \ldots + G(\beta_\mu)$$

est alors une fonction symétrique à coefficients entiers des racines de $f(z) = 0$ de degré $< \mu p$, qui contient en facteur $c_0^{\mu p}$, et est de la forme

$$H = H(c_0\beta_1) + H(c_0\beta_2) + \ldots + H(c_0\beta_\mu),$$

$H(y)$ étant un polynome en y à coefficients entiers : les $c_0\beta_j$ sont les racines de l'équation algébrique en Z

$$c_0(Zc_0^{-1})^\mu + c_1(Zc_0^{-1})^{\mu-1} + \ldots + c_\mu = 0$$

ou

$$Z^\mu + c_1 Z^{\mu-1} + c_2 c_0 Z^{\mu-2} + \ldots + c_\mu c_0^{\mu-1} = 0.$$

Cette dernière ayant ses coefficients entiers, H est un nombre entier.

Il en résulte, d'après (7_9), (9_9) et (10_9), que

$$P_1 = a c_\mu^p c_0^{\mu p}(p-1)! + p!\lambda,$$

où λ est entier. Si l'on prend p premier plus grand que a, que $|c_\mu|$ et que $|c_0|$, $P_1[(p-1)!]^{-1}$ est un entier positif ou négatif $\neq 0$.

2° Je considère maintenant P_2.

Le long de la ligne d'intégration, de o à β_j, $z\,g(z)$ et $e^{-z}g(z)$ ont leurs modules limités et plus petits, quel que soit β_j, que M et m respectivement; donc

$$\left|\int_0^{\beta_j}\right| < m\,M^{p-1}\left|\int_0^{\beta_j} dz\right| \leqq m\,M^{p-1}\,|\beta_j| \qquad (j=1,2,\ldots,\mu).$$

Si

$$k = (|\beta_1 e^{\beta_1}| + \ldots + |\beta_\mu e^{\beta_\mu}|)\,m,$$
$$|P_2| < k\,M^{p-1};$$

$|P_2|[(p-1)!]^{-1}$ est plus petit que $k\,M^{p-1}[(p-1)!]^{-1}$, et peut être pris $< \frac{1}{2}$, dès que p est assez grand; on le vérifiera au besoin en raisonnant comme à propos de (4_9). C. Q. F. D.

Remarque I. — $e^{pq^{-1}}$, $\pi^{pq^{-1}}$, plus généralement $\xi^{pq^{-1}}$, où ξ est transcendant, p, q entiers $\neq 0$, positifs ou négatifs, sont transcendants.

Sinon, soit $\xi^{pq^{-1}} = x_1$ algébrique : x_1^q est algébrique; $\xi^p = x_1^q$ serait algébrique, par suite aussi ξ.

Remarque II. — On a établi en fait, dans la démonstration de la transcendance de π, les résultats suivants, valables lorsque p est premier et assez grand :

1° $[(p-1)!]^{-1}a\int_0^\infty$ est un entier non multiple de p et $\neq 0$ quand $a \neq 0$;

2° $e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + \ldots + e^{\beta_\mu}\int_{\beta_\mu}^\infty$ est un entier multiple de $p!$;

3° $e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_\mu}\int_0^{\beta_\mu}$ a son module $< \frac{1}{2}(p-1)!$.

La seule hypothèse que l'on ait utilisée est que $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$ sont racines d'une même équation algébrique à coefficients entiers. La portée du raisonnement est donc très générale, et il conduit au résultat suivant (¹) :

(¹) M. Hilbert a d'ailleurs indiqué sans donner de détails qu'il était possible d'étendre sa démonstration (voir *Math. Ann.*, t. XLIII, p. 219).

telles que la série $\sum_0^\infty a_n t_n^{-1} x^n$ soit convergente quels que soient les entiers positifs ou négatifs $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, quand $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|, \ldots$ ont une limite supérieure finie A, si ζ est un nombre quelconque non algébrique et si $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots$ croissent suffisamment vite avec n, aucun nombre fonction algébrique à coefficients entiers de ζ n'est racine d'une des équations $\sum_0^\infty a_n t_n^{-1} x^n = 0$ (une infinité des coefficients a_n est supposée $\neq 0$).

2° Tout étant posé comme ci-dessus, et ζ étant algébrique ou transcendant, soit

$$Y = b_0 + b_1 \zeta^{-\psi_1} + \ldots + b_l \zeta^{-\psi_l} + \ldots,$$

(b_l entier $\leqq |\zeta|, |\zeta| > 1$); les ψ_l croissant assez vite avec l : *a*. — Y ne peut être algébrique; *b*. — Y ne peut être racine de

$$\sum_0^\infty a_n t_n^{-1} x^n$$

quand t_n croît suffisamment vite avec n.

Impossibilité de la quadrature du cercle — Il faut d'abord définir ce qu'on entend par cette expression; chercher à opérer la quadrature du cercle, c'est chercher, un cercle étant donné, à construire, par un nombre fini d'opérations, un carré ayant une aire équivalente, en ne se servant que de la règle et du compas. Par conséquent, on se donne *a priori* le rayon R du cercle, qu'on peut d'ailleurs prendre pour unité de longueur.

Quelles sont alors les constructions que permettent de faire les deux instruments en question? Ils permettent de mener des circonférences de centre déterminé, de transporter des longueurs d'une droite sur une autre en les portant à partir d'un point donné, de mener des droites parallèles à des droites données ou passant par des points donnés, par suite de mener des droites perpendiculaires à une droite donnée.

La seule donnée qui, d'après ce qui précède, soit livrée au hasard dans la construction est la position des extrémités d'un rayon du cercle donné dans le plan, position qui est la donnée initiale (plus généralement, pour une construction quelconque, la position des extrémités d'une droite donnée prise pour unité de longueur).

Voilà une première manière (manière A ou problème A) d'entendre une construction par la règle et le compas et sa possibilité.

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, si l'on prend une longueur égale à l'unité sur l'axe Ox à partir de l'origine O, j'admettrai d'abord que l'on ait, en se servant au besoin du compas, divisé la longueur unité en un certain nombre de parties égales, mené des circonférences de rayons rationnels ayant pour centres des points dont les deux coordonnées sont des fonctions rationnelles pq^{-1}, où p, q sont entiers positifs ou négatifs, c'est-à dire des circonférences C_1 dont l'équation sera de la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2,$$

où a, b, c sont des nombres rationnels positifs ou négatifs, et tracé des droites D_1 passant par des points de coordonnées rationnelles, dont les équations sont de la forme

$$a'x+b'y+c=0,$$

où l'on peut supposer $b'a'^{-1}$, $c'a'^{-1}$ rationnels, c'est-à-dire a', b', c' rationnels, si l'on prend a' rationnel. On peut construire en particulier les points P_1 dont les coordonnées sont de la forme pq^{-1}.

Les points déterminés par l'intersection de ces droites et cercles ont tous leurs coordonnées racines d'équations du premier ou du second degré dont les coefficients sont rationnels. Ces points, que j'appellerai *points* P_2, comprennent les points P_1.

J'opérerai sur les points P_2 comme je l'ai fait sur les points P_1 : je saurai construire des cercles C_2 et des droites D_2 dont les équations sont de la forme

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=c_1^2,$$
$$a'_1x+b'_1y+c'_1=0,$$

où a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1 sont fonctions rationnelles des coordonnées des P_2, et j'en déduirai par intersection les points P_3 dont les coordonnées sont racines d'équations du premier ou du deuxième degré à coefficients rationnels par rapport aux coordonnées de P_2 ; et ainsi de suite.

Une longueur ne pourra être construite par la règle et le compas que si, en déterminant un certain nombre de cercles, droites, points C_1, ..., C_n ; D_1, ..., D_n ; P_1, ..., P_n, je finis par tomber sur

deux points (x_n, y_n), (x'_n, y'_n) de l'ensemble P_n, n étant fini, dont la distance

$$\sqrt{(x_n - x'_n)^2 - (y_n - y'_n)^2}$$

soit la longueur cherchée l.

On voit par conséquent, par des éliminations successives, chaque coordonnée d'un point P_n qui entre dans l'expression de l étant racine d'une équation du premier ou du deuxième degré à coefficients rationnels par rapport aux coordonnées des P_{n-1}, que l est racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels par rapport aux coordonnées des P_{n-1}, puis d'une équation algébrique à coefficients rationnels par rapport aux coordonnées des P_{n+2}, ... Finalement, l est racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels ([1]).

Or le problème de la quadrature du cercle, s'il est possible, exige la construction du côté γ du carré d'aire équivalente à celle du cercle de rayon 1; donc $\gamma = \sqrt{\pi}$ devrait être racine d'une équation algébrique E, par suite aussi $\gamma^2 = \pi$, comme on le verrait en éliminant γ entre E et l'équation $\gamma^2 - \pi = 0$.

Par conséquent, d'après le théorème II_9 :

THÉORÈME IV_9. — *Avec la première manière* (*manière* A) ***d'entendre le problème de la quadrature du cercle, celle-ci est impossible.***

Mais, si l'on admet que l'on puisse en outre s'aider dans les constructions de droites menées au hasard ou de cercles de centre et de rayons choisis au hasard, on aura une autre manière (manière B ou problème B) d'entendre la possibilité d'une construction par la règle et le compas : le problème se complique et aurait besoin d'être défini avec plus de précision.

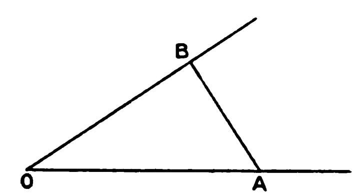
En effet, je prends deux droites OA, OB faisant un angle O, et je porte sur OA, à partir de O, une longueur égale à l'unité; du point A

([1]) On remarquera que les coordonnées des points P_1 sont rationnelles, que celles des P_2 ne contiennent que des racines carrées de quantités rationnelles, etc.; plus généralement, les coordonnées des P_n ne renferment que des radicaux carrés. Les éliminations successives se faisant toutes entre équations du premier ou du deuxième degré, l sera racine d'une équation dont le degré est une puissance de 2 (comparer KLEIN, *Leçons précitées*, rédaction Griess, p. 12 et suiv., et mon Mémoire des ***Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse***, 1904, p. 332).

j'abaisse, ce qui peut se faire avec la règle et le compas, une perpendiculaire sur OB; on a

$$AB = \sin O.$$

Si, *par hasard,* l'angle O est tel que $\sin O = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, je n'aurai qu'à doubler AB, pour avoir $\sqrt{\pi}$ et résolu le problème de la quadrature du cercle.



Mais je n'ai *a priori*, semble-t-il, aucun moyen de reconnaître un angle O convenable; cette remarque suggère le moyen de poser le problème.

Lorsque je me permettrai de choisir au hasard un point défini par une ou deux de ses coordonnées (¹), une direction de droite définie par son coefficient angulaire m, un rayon R de circonférence, je conviendrai que l'on ne fixe pas la valeur de ces quantités et que la construction doit rester la même dans sa marche si l'on fait varier, d'ailleurs aussi peu qu'on veut, et d'une manière indépendante, ces quantités; si j'établis qu'en étudiant, dans la manière B, la possibilité d'une construction par la règle et le compas, celle-ci ne peut se faire qu'en attribuant à certaines des quantités prises au hasard des valeurs particulières, que l'on n'est pas sûr d'avoir choisies *a priori*, je dirai que la construction est *en général* impossible par la règle et le compas (²).

Quelles sont alors les conditions pour qu'une construction soit *en général* impossible par la règle et le compas?

Je raisonnerai de la même façon qu'à propos du problème A : je partirai de points P'_1 dont les coordonnées sont fonctions rationnelles

---

(¹) Une si le point est pris sur une ligne connue, deux s'il n'y est pas.

(²) Cela revient à dire que ces quantités ne doivent jouer dans la construction qu'un rôle auxiliaire, le même quelle que soit leur valeur dans un domaine de variation d'ailleurs aussi petit qu'on veut.

à coefficients rationnels d'un certain nombre d'arbitraires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$, des cercles

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2,$$

dont les centres sont des points P'_1 et les rayons des fonctions rationnelles à coefficients rationnels de $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$, des droites

$$a'x+b'y+c'=0$$

passant par deux points P'_1, où a', b', c' sont, si l'on veut, fonctions rationnelles à coefficients rationnels de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$. Je pourrai toujours supposer que les arbitraires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ soient les seules qui concourent à la construction considérée.

Je prendrai alors les points P'_2 déterminés par l'intersection de ces droites et cercles, et j'opérerai sur eux comme je l'ai fait sur les P'_1; et ainsi de suite : la marche est absolument la même que dans le problème A, quand il n'y a pas d'arbitraires, et le problème A n'est qu'un cas particulier du problème B.

Finalement, je vois que la longueur cherchée l sera racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles à coefficients rationnels de $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$, équation de degré 2^s. L'expression de l ne renferme que des radicaux carrés.

Or, par hypothèse, cette valeur de l doit être indépendante des arbitraires $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$, qui n'ont joué qu'un rôle auxiliaire dans la construction, ou, si l'on veut, ne pas changer quand $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ varient, d'ailleurs aussi peu que l'on veut, indépendamment l'une de l'autre; par conséquent l'expression ci-dessus de l ne doit contenir ni μ_1, ni $\mu_2, \ldots$, ni μ_ν; c'est dire que l'équation sera absolument indépendante de $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$. L'équation dont dépendra l sera une équation algébrique à coefficients rationnels ne renfermant pas d'arbitraires, comme dans le cas du problème A.

Dès lors, les conclusions seront les mêmes en ce qui concerne π, et l'on peut dire :

Théorème V_9. — *Avec la deuxième manière (manière* B) *d'entendre le problème de la quadrature du cercle, celle-ci est,* EN GÉNÉRAL, *impossible.*

CHAPITRE X.

EXTENSION AUX SÉRIES A COEFFICIENTS RATIONNELS DES PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES A COEFFICIENTS RATIONNELS.

Considérations générales. — Avant d'aller plus loin, il sera bon de donner un aperçu d'ensemble de diverses catégories de problèmes que l'on pourra se poser à propos des nombres transcendants.

L'étude des propriétés de certains de ces nombres sera, bien entendu, en relation avec la façon dont on définira ceux-ci.

I. Si on les suppose donnés par leur expression dans un système de numération à base entière q, par exemple par leur expression décimale ($q = 10$), on pourra chercher à quels caractères on reconnaîtra un nombre transcendant, corrélativement un nombre rationnel ou algébrique. C'est ainsi, d'après le théorème de Liouville, que le nombre est certainement transcendant, quand la suite des chiffres à droite de la virgule présente à partir du $n^{\text{ième}}$ chiffre, pour une infinité de valeurs de n, une suite de zéros consécutifs dont l'étendue croît suffisamment vite avec n.

Des problèmes tout à fait analogues se poseront quand on se donne le développement en fraction continue ordinaire $1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$, où $a_1, a_2, \ldots$ sont entiers > 0, des nombres considérés; c'est ainsi, d'après le même théorème de Liouville, que le nombre est certainement transcendant quand, pour une infinité de valeurs de n, a_n croît suffisamment vite avec n.

De même encore pour les nombres transcendants définis par une suite analogue à ($1'_3$).

On pourra encore chercher à étudier l'effet des opérations fondamentales, addition, soustraction, multiplication, division, effectuées entre les nombres considérés, pour connaître des propriétés des résultats obtenus. De même pour d'autres opérations, comme l'extraction de racines. On cherchera à définir, par exemple, des groupes de

nombres transcendants ayant une propriété commune qui appartient ou non en même temps au résultat de certaines de ces opérations. On pourra chercher à distinguer diverses catégories de nombres transcendants.

Les Chapitres II, III, VI, VII et la Note II montrent des applications de ces idées.

II. Mais on pourra aussi supposer, ce qui arrivera souvent, des nombres transcendants définis comme racines d'une ou de plusieurs séries convergentes à coefficients rationnels.

Les nombres algébriques sont définis comme racines d'une équation algébrique à coefficients entiers (ou rationnels, ce qui revient au même),

$$(\alpha) \qquad a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0.$$

Ils sont dits entiers algébriques quand a_0 est entier; on peut évidemment se borner dans l'étude des nombres algébriques à considérer les équations irréductibles, c'est-à-dire qui n'admettent aucun diviseur de degré plus petit à coefficients rationnels.

La première chose à faire semblerait ainsi être de chercher à étendre aux séries, à coefficients rationnels ou non, un certain nombre des propriétés des polynomes algébriques à coefficients rationnels (ou à les modifier convenablement) au point de vue de la multiplication et de la division. Dans cet ordre d'idées, les considérations du Chapitre IV deviennent très importantes, car elles donnent des exemples très variés de séries dont un même nombre transcendant est racine; elles montrent en même temps que, pour étudier tous les nombres transcendants à ce point de vue, il suffira de considérer une catégorie spéciale de séries, par exemple les fonctions quasi-algébriques des formules (11_4) (k assez grand) ou (12_4).

On pourra, bien entendu, considérer soit des séries ordonnées suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x, soit des fonctions quasi-entières, soit des fractions continues, soit même d'autres algorithmes [1].

Un type d'études de ce genre serait la démonstration de la trans-

---

[1] *Voir* Chap. VII, p. 140.

cendance de $\frac{\pi}{2}$ considéré comme racine de

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

III. On pourra envisager des problèmes se rattachant simultanément aux deux catégories précitées : par exemple, on cherchera, pour les séries (11_4) et (12_4), si la rapidité de croissance des $|d_i|$ a quelque rapport avec la nature d'une racine, qui peut être rationnelle, algébrique, ou transcendante, ou encore avec les propriétés de la représentation d'une racine, soit dans un système de numération de base q, soit comme fraction continue. Comme application de ces idées, on peut citer le Chapitre VIII. On obtient là un moyen de distinguer dans certains cas des catégories de nombres transcendants.

IV. On pourra considérer des catégories de fonctions $f(x)$, $f_1(x)$, ... d'une variable x, séries, fractions continues, etc., à coefficients rationnels, et chercher diverses propriétés des nombres obtenus en donnant à x des valeurs rationnelles, algébriques ou transcendantes d'une nature particulière, étudier l'effet de diverses opérations sur ces fonctions ou ces nombres, comme l'addition, la multiplication, l'itération [c'est-à-dire, par exemple, l'opération $f_1[f(x)]$ qui consiste à substituer $f(x)$ à x dans $f_1(x)$]. Comme type d'études (¹) de ce genre, ayant des points communs avec celles indiquées au paragraphe I, on peut citer les considérations du Chapitre V, et, si l'on veut, la démonstration de la transcendance de

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

ou d'une des séries qui représentent le nombre π.

V. Enfin on pourrait classer *provisoirement* dans une dernière catégorie les résultats relatifs à des nombres transcendants particuliers, obtenus par des méthodes spéciales; en fait les démonstrations de la transcendance de e et π par les procédés d'Hermite et de MM. Lindemann, Hilbert, etc. rentreraient plutôt dans cette catégorie. Il en a été question au Chapitre IX.

(¹) A ce sujet, *voir* mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1904.

Comme on le voit, il ne me reste qu'à montrer comment on peut aborder l'étude des problèmes indiqués au paragraphe II : c'est ce dont je vais m'occuper dans ce qui suit [1] (Chap. X, XI, XII).

Propriétés arithmétiques des séries à coefficients rationnels.

Soit la série convergente

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

à coefficients rationnels, ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

1° La multiplication par un polynome ou une série analogue à coefficients rationnels donne une série analogue.

En effet, soit par exemple

$$f_1(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$
$$ff_1 = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1) x + \ldots,$$

les coefficients de ff_1 sont rationnels, et cette série converge.

L'addition et la soustraction de f et f_1 conduisent au même résultat; la division également : on sait que cette division pourra toujours s'effectuer; on posera

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots;$$
$$f = \varphi f_1, \qquad a_0 = b_0 c_0, \qquad a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0, \qquad \ldots,$$

ce qui donne, de proche en proche, $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ rationnels. Si f et f_1 convergent pour $|x| < R$, ce que je suppose, et si ρ est le module minimum des zéros de f_1, soit r la plus petite des quantités R et ρ : la fonction ff_1^{-1} reste finie pour $|x| < r$, et peut se représenter par une série convergente pour $|x| < r$, ordonnée suivant les puissances croissantes de x. Cette dernière coïncide alors avec la série φ et a ses coefficients rationnels.

---

(1) Bien entendu, je laisse de côté ici des problèmes non résolus qui paraissent provisoirement peu abordables; exemples : transcendance de e^e, de e^π, de π^π, et généralisations (Voir *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1900, p. 357, question 1960; 1904, p. 9, question 2718; 1905, p. 4, question 2884); ou encore extensions des théories de Galois sur les équations algébriques aux séries à coefficients rationnels. Toutefois, à ce sujet, *voir* HENSEL, *Jahresbericht der D. Math. Vereinigung*, nov.-déc., 1905, p. 545 et suivantes.

Finalement :

Les quatre opérations fondamentales, addition, soustraction, multiplication, division, effectuées sur les séries de Maclaurin à coefficients rationnels, donnent des séries à coefficients rationnels.

On voit de même, quand les coefficients des séries données sont algébriques, que ces quatre opérations donnent des séries à coefficients algébriques; quand ce sont des nombres rationnels ou des nombres correspondants de Liouville (Chap. III), ces quatre opérations donnent des séries dont les coefficients sont des nombres rationnels ou des nombres correspondants de Liouville (nombres de l'ensemble H_1, Chap. III, p. 33).

On est conduit à une conclusion analogue quand les coefficients des séries appartiennent respectivement aux ensembles C, C_1, C_2 considérés ci-après (p. 168-170).

2° Soit $F(x)$ un polynome à coefficients rationnels ou algébriques : si a est un nombre rationnel ou algébrique, $F(x+a)$ est un polynome entier en x à coefficients rationnels ou algébriques.

Je considère, au contraire, $f(x+a)$ $(a \neq 0)$:

$$f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots,$$

en admettant que le rayon de convergence de $f(z)$ soit supérieur à $|a|$, $|x|$ et $|a|+|x|$, ce qui sera le cas, quels que soient a et x, pour les fonctions entières.

Soit, en particulier,

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$e^{x+a} = e^a\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right);$$

on a vu (Chap. IX) que e^a est transcendant quand a est rationnel, et les coefficients de $f(x+a)$ sont ici tous transcendants pour toute valeur rationnelle de a.

De même je prends la fonction quasi-algébrique

$$(2_{10}) \qquad f(x) = p_0 q_0^{-1} \pm p_1 q_1^{-1} x \pm \ldots \pm p_m q_m^{-1} x^m \pm \ldots,$$

$(p_m, q_m$ entiers donnés), où $p_m q_m^{-1}$ est une fonction de n dont la

décroissance est suffisamment rapide : je préciserai cette condition tout à l'heure. On a

$$(3_{10}) \qquad f(x+a) = f(a) + x f'(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots,$$

$$f^{(n)}(a) = \pm n!\, p_n q_n^{-1} \pm \frac{(n+1)!}{1!} p_{n+1} q_{n+1}^{-1}\, a \pm \ldots \pm \frac{m!}{(m-n)!} p_m q_m^{-1} a^{m-n} \pm \ldots$$
$$= u_{n,n} \pm u_{n,n+1} \pm \ldots \pm u_{n,m} \pm \ldots.$$

J'assujettis maintenant $p_m q_m^{-1}$ à la condition

$$p_m q_m^{-1} \leqq [\, m!\, m^m (m^m q_0 q_1 \ldots\ q_{m-1})^{m-1}]^{-1}.$$

On a, si $a = pq^{-1}$ (p, q entiers), à partir d'une certaine valeur de m :

$$u_{n,m} = \frac{m!}{(m-n)!} p_m q_m^{-1} (pq^{-1})^{m-n}$$
$$\leqq m(m-1)\ldots(m-n+1)[\, m!\, m^m (m^m q_0 q_1 \ldots q_{m-1})^{m-1}]^{-1} (pq^{-1})^{m-n}$$
$$\leqq 2^{-m} (q^{m-n} q_0 q_1 \ldots q_{m-1})^{-(m-1)}.$$

Je pourrai écrire

$$f^{(n)}(a) = \mathrm{P}_{m-1} \mathrm{Q}_{m-1}^{-1} \pm u_{n,m} \pm \ldots,$$

où P_{m-1}, Q_{m-1} sont entiers et

$$\mathrm{Q}_{m-1} = q^{m-n} q_0 q_1 \ldots q_{m-1} > \mathrm{Q}_{m-2} > \mathrm{Q}_{m-3} > \ldots.$$

Alors

$$u_{n,m} \leqq (2^m \mathrm{Q}_{m-1}^{m-1})^{-1}, \qquad u_{n,m+1} \leqq (2^{m+1} \mathrm{Q}_{m-1}^{m-1})^{-1}, \qquad \ldots,$$
$$\pm u_{n,m} \pm u_{n,m+1} \pm \ldots \mid\ \leqq (2^m \mathrm{Q}_{m-1}^{m-1})^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) \leqq (2\mathrm{Q}_{m-1})^{-(m-1)};$$
$$| f^{(n)}(a) - \mathrm{P}_{m-1} \mathrm{Q}_{m-1}^{-1} | \leqq (2\mathrm{Q}_{m-1})^{-(m-1)}.$$

Ceci posé, si $f^{(n)}(a)$ est nul ou rationnel, d'après l'inégalité précédente, à partir d'une certaine valeur de m,

$$f^{(n)}(a) = \mathrm{P}_{m-1} \mathrm{Q}_{m-1}^{-1},$$

ce qui est impossible, quand $f(x)$ est une série. L'inégalité précédente montre d'ailleurs que $f^{(n)}(a)$ n'est pas algébrique (théorème

de Liouville, Chap. II). Il en résulte que $f^{(n)}(a)$ est un nombre transcendant de Liouville.

Les coefficients de la série (3_{10}) *sont tous transcendants de Liouville.*

On arrive d'ailleurs à une conclusion semblable quand on prend pour $f(x)$ dans (3_{10}) la fonction considérée au théorème I_5 (corollaire I_5).

Voici donc une propriété importante des polynomes à coefficients rationnels qui ne s'étend pas à certaines séries à coefficients rationnels.

Il ne faudrait pourtant pas croire que la même chose aura lieu pour toute série à coefficients rationnels : j'indiquerai tout à l'heure un exemple du cas contraire.

Cependant il semble vraisemblable qu'une propriété *analogue* à celle que possède $F(x+a)$, où a est rationnel, quand $F(x)$ est un polynome à coefficients rationnels, peut être énoncée pour certaines catégories de séries à coefficients rationnels.

Ainsi, quand $f(x) = e^x$, e^{x+a}, développé suivant les puissances croissantes de x, a ses coefficients de la forme $e^a(n!)^{-1}$.

Ceci suggère alors les remarques suivantes : je considère

$$y_k = e_k(x) \quad \text{où} \quad e_1(x) = e^x, \quad e_2(x) = e^{e^x}, \quad \ldots,$$

on a

$$\begin{aligned} y'_k &= y_k e_{k-1}(x) e_{k-2}(x) \ldots e_1(x), \\ y''_k &= y'_k e_{k-1}(x) \ldots e_1(x) + y_k [e_{k-1}(x) \ldots e_1(x)]', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On voit que les dérivées successives de y_k sont des polynomes entiers en $y_k, y_{k-1}, \ldots, y_1$. Donc, d'abord, le développement de $e_k(x)$ par la série de Maclaurin a pour coefficients des polynomes à coefficients rationnels formés avec $e_1 = e$, $e_2 = e^e$, $\ldots$, $e_{k-1} = e_k(0)$. Ensuite, $e_k(x+a)$, développé suivant les puissances croissantes de x, par la formule de Taylor, a pour coefficients des polynomes à coefficients rationnels formés avec $e_1(a)$, $e_2(a)$, $\ldots$, $e_k(a)$.

Mais, si a est lui-même de la forme $e_{m_1}(\alpha)$, où α, réel ou non, est rationnel (ou encore algébrique, ou encore, soit rationnel, soit transcendant de Liouville), $e_l(a)$ est de la forme $e_{m_1+l}(\alpha)$. Je range dans

une même catégorie C, dite *provisoirement première catégorie exponentielle,* tous les nombres de la forme $e_m(\alpha)$ ($m = 1, 2, \ldots$). On voit que, si le nombre a appartient à cette catégorie, tous les coefficients du développement de $e_k(x+a)$ suivant les puissances croissantes de x seront des polynomes à coefficients rationnels formés avec les nombres $e_m(\alpha)$ (¹).

On peut aussi ranger dans une même catégorie C_1 non seulement les nombres $N = e_m(\alpha)$, mais encore tous les polynomes P à coefficients rationnels formés avec ces nombres, puis les nombres N_1 obtenus en substituant aux α des polynomes P, puis les polynomes P_1 à coefficients rationnels formés avec ces nombres N_1, et ainsi de suite indéfiniment. Avec cette nouvelle convention, si a est un nombre de C_1, $e_l(a)$ en est un, comme aussi tout polynome formé avec les $e_l(a)$, et l'on obtient ce résultat :

Dans le développement de $e_k(x+a)$ ($k = 1, 2, \ldots$) suivant les puissances croissantes de x, lorsque a est un nombre de C_1, tous les coefficients sont des nombres de C_1.

Il en sera de même pour le développement de tout polynome à coefficients rationnels formé avec des quantités $e_k(x+a)$, $e_{k_1}(x+a)$, ...

Je prends encore le cas où $f(x)$ est une des fonctions considérées à la note (1) (p. 115) du théorème II_5 : $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$, ..., lorsque a est un nombre rationnel ou un nombre transcendant de Liouville d'une certaine espèce, sont des nombres rationnels ou des nombres de Liouville de même espèce, d'après le théorème II_5 et la note (1) (p. 115). Par conséquent :

Lorsque $f(x)$ est une des séries à coefficients rationnels considérée à la note (1) (p. 115) *du théorème I_5, le développement*

$$f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots,$$

(¹) On pourrait se demander si les nombres de C (ou de C_1) ne contiennent pas tous les nombres possibles. Mais, en fût-il ainsi, ce qui précède n'en restreint pas moins beaucoup l'espèce arithmétique possible des coefficients du développement; en effet, ces coefficients sont des polynomes à coefficients rationnels formés avec les $e_m(\alpha)$, où $m \leqq k + m_1$.

On pourrait faire une remarque analogue lorsque a est un nombre de C_1 et qu'on limite m et le nombre des opérations N, P, N_1, P_1, ...

où a est rationnel ou transcendant de Liouville de même espèce que $f(1)$, a pour coefficients des nombres rationnels ou transcendants de Liouville de même espèce que $f(1)$.

Plus généralement, soient $f(x), \ldots, f_j(x), \ldots$ les séries à coefficients rationnels considérées au théorème II_5, en laissant de côté, comme dans la note (1) de la page 115, les conditions $\mathrm{I}_{n+1} > \mathrm{I}_n$, ξ_j positif, pq^{-1} positif; je joins à ces fonctions toutes leurs dérivées; soit

$$|x, \Phi(x)|$$

une substitution du groupe dérivé des substitutions

$$S_{j,n} = |x, f_j^{(n)}(x)| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Soit encore C_2 l'ensemble des nombres $\Phi(pq^{-1})$, où pq^{-1} est rationnel quelconque, $\neq 0$ ou non, γ_2 l'ensemble des fonctions $\Phi(x)$. D'abord

$$\Phi(x) = \Phi(0) + x\,\Phi'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}\Phi^{(n)}(0) + \ldots.$$

Soit $|x, \Phi_\varpi(x)|$ une substitution dérivée de ϖ substitutions $S_{j,n}$:

$$\Phi_\varpi = f_j^{(n)}[\Phi_{\varpi-1}(x)],$$

où $\Phi_{\varpi-1}(x)$ est dérivée de $\varpi - 1$ substitutions. Alors

$$\Phi'_\varpi = f_j^{(n+1)}[\Phi_{\varpi-1}(x)]\,\Phi'_{\varpi-1}(x),$$
$$\Phi''_\varpi = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il en résulte que les dérivées de Φ_ϖ sont des polynomes entiers à coefficients rationnels formés avec des fonctions $\Phi_\varpi, \Phi_{\varpi-1}, \ldots$. Un pareil polynome, pour toute valeur rationnelle pq^{-1} de x, nulle ou non, est un polynome à coefficients rationnels formé avec les nombres $\Phi_m(pq^{-1})$. Par conséquent, ce sera le cas pour $\Phi(0)$, $\Phi'(0), \ldots, \Phi^{(n)}(0), \ldots$.

D'autre part, je considère

$$\Phi(x+a) = \Phi(a) + x\,\Phi'(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!}\Phi^{(n)}(a) + \ldots;$$

quand a est un des nombres $\Phi_m(pq^{-1})$, $\Phi^{(n)}(a)$ sera encore un polynome à coefficients entiers formés avec les nombres $\Phi_m(pq^{-1})$. Donc :

L'ensemble γ_2 des fonctions $\Phi(x)$ définies ci-dessus jouit de cette propriété que, dans le développement de $\Phi(x+a)$ suivant les puissances croissantes de x, tous les coefficients sont des polynomes à coefficients rationnels formés avec les nombres de C_2 (¹).

On pourrait encore, comme dans le cas de $e_k(x)$, chercher à former des ensembles plus généraux que C_2 et γ_2 en partant, pour former γ_2, non seulement des fonctions $f(x)$, ..., $f_j(x)$, ... et de leurs dérivées, mais encore de tous les polynomes à coefficients rationnels formés avec ces fonctions et de leurs dérivées : je ne m'y attarde pas.

Finalement, il résulte de là, comme pour le premier paragraphe, que certaines catégories de séries ont des propriétés analogues à celle que j'ai rappelée pour tout polynome $F(x)$ à coefficients rationnels, à condition de supposer que les coefficients appartiennent à certains ensembles formés des nombres rationnels et de certains autres nombres.

3° Soit encore $F(x)$ un polynome à coefficients rationnels ou algébriques : pour toute valeur rationnelle ou algébrique de x, $F(x)$ est rationnel ou algébrique.

On peut trouver pour les séries $f(x)$ des exemples du contraire. On peut même penser qu'en général $f(pq^{-1})$, où pq^{-1} est rationnel (ou algébrique), sera transcendant, $f(0)$ étant bien entendu rationnel (ou algébrique). Cela résulte amplement du Chapitre II et aussi du Chapitre V (théorèmes I_5 et II_5) sur les fonctions génératrices de nombres transcendants. Un des exemples les plus simples est

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

(Chap. IX).

Mais, *ici encore, comme dans les deux premiers paragraphes, une propriété analogue aura lieu pour certaines catégories de*

(¹) Ici encore, la véritable portée de cet énoncé résulte de ce que, pour une valeur donnée de $\Phi_\varpi(x)$, $\Phi_\varpi(a)$, $\Phi'_\varpi(a)$, ..., $\Phi^{(n)}_\varpi(a)$, ... sont des polynomes où le nombre des fonctions Φ_ρ qui interviennent est limité en fonction de n et ϖ, comme aussi l'indice ρ de ces fonctions. Tous ces nombres et ces polynomes appartiennent à un ensemble H_3 considéré au Chapitre III (p. 36).

séries dont les coefficients appartiennent à des ensembles ou catégories de nombres convenablement choisis. Il en est ainsi pour les fonctions $e_k(x)$, quand x appartient à C *ou* C_1, *pour les fonctions* $f(x)$ *de* γ_2 *quand* x *appartient à* C_2 (p. 168 à 170).

C'est le lieu de signaler des séries qui jouissent identiquement, en tout ou en partie, des propriétés des polynomes rappelées dans les trois paragraphes de ce Chapitre.

Voici un premier exemple : je considère le polynome

$$Z_m(x) = \prod_m (\chi x - \varpi),$$

formé du produit de tous les binomes obtenus en donnant à ϖ et χ toutes les valeurs des entiers positifs ou négatifs $\neq 0$ dont la valeur absolue est $\leqq m$. $Z_m(x)$ a pour racines tous les nombres rationnels $\varpi\chi^{-1} \neq 0$ dont le numérateur et le dénominateur sont, en valeur absolue, $\leqq m$; $Z_m(x)$ contient $4m^2$ facteurs du premier degré, est de degré $4m^2$, et a ses coefficients entiers tous plus petits, en valeur absolue, que m^{4m^2}. La fonction

$$(4_{10}) \qquad \Psi_1(x) = A \pm x^k \sum_1^\infty r_m \varphi_m^{-\lambda} Z_m(x),$$

où l'on a r_m rationnel limité quelconque > 0 pour une infinité de valeurs de m, k constant et entier > 0, A constant et rationnel, λ entier $\geqq 1$,

$$\varphi_m = b_2(mh_m) \quad (^1),$$

(1) Notation expliquée à la page 69, Chapitre IV : $b_2(y) = b^{b^y}$, où b est entier $\geqq 2$. J'ajouterai, pour les lecteurs au courant de la théorie des fonctions entières d'ordre zéro, que $\Psi_1(x)$ est en général d'indice $\geqq 2$ (E. Maillet, *Journ. École Polyt.*, 1905, p. 31). On peut dès lors se poser ce problème, dont je n'ai pas la solution :

Trouver toutes les fonctions entières de x à coefficients rationnels (ou algébriques) qui ne prennent que des valeurs rationnelles (ou algébriques) pour les valeurs rationnelles (ou algébriques) de x.

A ce sujet on pourra peut-être utiliser le Mémoire de M. Borel sur les séries divergentes, *Ann. de l'École Normale*, 3me série, t. XVI, mars 1899, p. 83.

$\Psi_1(x)$ est bien rationnel pour x rationnel réel, car, si $x = \pm pq^{-1}$, où p, q sont des entiers premiers entre eux, $Z_m(x)$ est nul dès que m est au moins égal à la plus grande des valeurs p et q, et $\neq 0$ quand m est plus petit.

$h_m \geqq 1$, mh_m entier, h_m fonction de m, n'a que des valeurs rationnelles réelles pour toute valeur rationnelle réelle de x; je suppose que $\Psi_1(x)$ converge quel que soit x, c'est-à-dire soit une fonction entière [en fait, la propriété reste exacte quand r_m et φ_m sont rationnels quelconques, même si $\Psi_1(x)$ diverge].

Si les logarithmes sont pris dans le système de base b et si $x_1 = |x|$,

$$|Z_m(x)| \leqq [m(x_1+1)]^{4m^2} = b^{4m^2 \log[m(x_1+1)]},$$
$$\log[\varphi_m^\lambda |Z_m(x)|^{-1}] \geqq \lambda b^m - 4m^2 \log[m(x_1+1)] \geqq m,$$
$$|Z_m(x)| \varphi_m^{-\lambda} \leqq b^{-m},$$

pour toute valeur de x, dès que m est assez grand; la série $\Psi_1(x)$ est alors convergente, puisque $b \geqq 2$; c'est une fonction entière. Par conséquent :

Il existe des fonctions entières de x, séries de polynomes à coefficients rationnels, qui ne prennent, comme les polynomes, que des valeurs rationnelles pour les valeurs rationnelles réelles de x.

La fonction $\Psi_1(x)$ jouit ainsi d'une propriété importante des polynomes : elle est rationnelle pour x rationnel réel; mais on ne sait si $\Psi_1(x+a)$, où a est rationnel, a les coefficients de son développement suivant les puissances croissantes de x rationnels.

On peut former des fonctions $\Psi_2(x)$ jouissant de la propriété que l'on vient de trouver pour $\Psi_1(x)$ et telles que $\Psi_2(x+a)$ ait, pour toute valeur rationnelle de a, les coefficients de son développement suivant les puissances croissantes de x rationnels. Je prendrai

$$(5_{10}) \qquad \Psi_2(x) = A \pm x^k \sum_1^\infty r_m \varphi_m^{-m\lambda} [Z_m(x)]^m \quad (^1).$$

---

(1) On pourrait prendre aussi φ_m^λ au dénominateur au lieu de $\varphi_m^{m\lambda}$. On voit de suite qu'il y a, comme pour Ψ_1 et Ψ_3 (*voir* plus loin), une catégorie de fonctions analogues ayant les mêmes propriétés; ainsi on peut multiplier $Z_m(x)$ par un polynome de degré limité; on peut ajouter à l'exposant m de Z_m un nombre entier positif ou négatif limité en valeur absolue, prendre même, au lieu de l'exposant m, l'exposant $2m$, $3m$, etc., ajouter au dénominateur $\varphi_m^{m\lambda}$ une fonction positive de m, qui soit un nombre entier, et dont le rapport à $\varphi_m^{m\lambda}$ tend vers zéro quand m croît indéfiniment, etc.

r_m, k, A, λ, φ_m étant déterminés comme précédemment. $\Psi_1(x)$ étant une fonction entière, il en est de même, *a fortiori* de $\Psi_2(x)$, car la racine de $m^{\text{ième}}$ de son $(m+1)^{\text{ième}}$ terme a un module qui tend vers zéro quand m croît indéfiniment. Mais, si je forme la dérivée $p^{\text{ième}}$ de $\Psi_2(x)$, on voit que, pour $m \geqq p+1$, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de chaque terme $x^k \varphi_m^{-m\lambda}[Z_m(x)]^m$ contient encore en facteur $Z_m(x)$. Par conséquent, pour toute valeur rationnelle a de x, tous les termes, sauf un nombre fini d'entre eux, s'annulent, et la valeur de $\Psi_2^{(p)}(a)$ est rationnelle.

On peut aller plus loin encore :

Je vais former des fonctions $\Psi_3(x)$ prenant pour toute valeur rationnelle ou algébrique, réelle ou imaginaire de x, une valeur rationnelle ou algébrique, et telles que le développement en série de $\Psi_3(x+a_1)$ suivant les puissances croissantes de x ait ses coefficients rationnels ou algébriques quand a_1 est rationnel ou algébrique.

Pour cela, je considère d'abord une suite de polynomes $Y_m(x)$ dont le $m^{\text{ième}}$ est formé du produit de tous les polynomes de degré $\leqq m$, et dont les coefficients sont, en valeur absolue, au plus égaux à m :

$$Y_m(x) = \prod(\alpha_0 x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \ldots + \alpha_m).$$

Le nombre de ces polynomes de degré m est plus petit que $(2m+1)^{m+1}$, chaque coefficient pouvant prendre une des valeurs 0, ± 1, ..., $\pm m$, ces coefficients n'étant pas tous nuls à la fois; pour une valeur de x dont le module est x_1, chacun des facteurs de $\prod$ a son module au plus égal à

$$m(x_1^m + x_1^{m-1} + \ldots + 1) \leqq m(m+1)y^m,$$

où y est la plus grande des deux quantités 1 et x_1. Donc

$$|Y_m(x)|^m \leqq [m(m+1)y^m]^{m(2m+1)^{m+1}} < (2y)^{m^2(2m+1)^{m+1}} < (2y)^{(2m+1)^{m+3}}.$$

Ceci posé, je considérerai la fonction

$$(6_{10}) \qquad \Psi_3(x) = A \pm x^k \sum_1^{\infty} r_m \psi_m^{-\lambda}[Y_m(x)]^m,$$

r_m, k, A, λ, h_m étant déterminés comme pour (4_{10}), et ψ_m étant égal à $b_3(mh_m)$. On a, les logarithmes étant pris dans le système de base b,

$$\psi_m^\lambda \geqq b_2(m), \qquad \log(\psi_m^\lambda \,|\, Y_m(x)\,|^{-m}) \geqq b_2(m) - (2m+1)^{m+3}\log(2y) > m,$$

dès que m est supérieur à une certaine limite, et

$$|\, Y_m(x)\,|^m \psi_m^{-\lambda} < b^{-m} \quad (^1);$$

si $r_m \leqq r$ (r fini), on voit qu'à partir d'une certaine valeur de m, $\Psi_3(x)$ a les modules de ses termes plus petits que ceux de la progression géométrique $\sum_m b^{-m}$ qui converge, puisque $b \geqq 2$; donc $\Psi_3(x)$ converge, quel que soit x; c'est une fonction entière [2].

Quand x a une valeur rationnelle $\pm a$, avec $a = pq^{-1} > 0$ (p, q premiers entre eux), $Y_m(x)$ est nul dès que m est au moins égal au plus grand ϖ des deux nombres p et q, et ne l'est pas si m est plus petit; par conséquent, $\Psi_3(x)$ est rationnel pour toute valeur rationnelle réelle [3] de x.

Plus généralement, quand x a une valeur rationnelle ou algébrique a'

---

(1) On a

$$(2m+1)^{m+3}\log(2y) < (2m+1)^{m+4},$$

et il suffit

$$b_2(m) > (2m+1)^{m+5} > (2m+1)^{m+4} + m,$$

ou

$$b^m > (m+5)\log(2m+1),$$

ce qui a lieu quand m est supérieur à une certaine limite.

(2) Elle est en général d'indice au moins égal à 3.

(3) Si x est imaginaire et rationnel, c'est-à-dire de la forme $\frac{p+p_1 i}{q}$, où p, p_1, q sont entiers, $i = \sqrt{-1}$, x est racine de l'équation algébrique

$$0 = q^2\left(x - \frac{p+p_1 i}{q}\right)\left(x - \frac{p-p_1 i}{q}\right) = [(qx-p)^2 + p_1^2],$$

à coefficients rationnels, et annule tous les polynomes $Y_m(x)$ quand m est au moins égal au plus grand des nombres $p^2+p_1^2$, q^2, $2pq$. $\Psi_3(x)$ est encore rationnel, mais réel ou imaginaire.

réelle ou non, racine d'une équation $g(x) = 0$ algébrique irréductible à coefficients entiers, soit encore ϖ la plus grande valeur absolue d'un coefficient de cette équation : $Y_m(x)$ est divisible par $g(x)$ dès que $m \geqq \varpi$, et ne l'est pas si m est plus petit : $g(a')$ étant nul, par définition de a', $\Psi_3(a')$ est la somme d'un nombre limité de termes, qui sont algébriques, et est algébrique.

Par conséquent, $\Psi_3(x)$ est algébrique pour toute valeur algébrique de x.

De plus, si l'on forme la dérivée $p^{\text{ième}}$ de $\Psi_3(x)$, pour $m \geqq p+1$, la dérivée de chaque terme contient encore en facteur $Y_m(x)$; pour toute valeur a'' rationnelle ou algébrique, réelle ou imaginaire de x, $\Psi_3^{(p)}(a'')$ est rationnel ou algébrique, et est réel quand a'' est réel, pourvu que A et r_m soient réels.

Le résultat annoncé est ainsi complètement établi.

C. Q. F. D.

On peut toutefois se demander, et la question n'est pas toujours inutile, comme on va le voir, si les séries $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_3(x)$ sont bien, quand on les ordonne suivant les puissances croissantes de x, des séries à coefficients rationnels. La réponse est immédiate pour $\Psi_3(x)$, d'après la manière dont on l'a formé : $\Psi_3^{(p)}(a)$ est rationnel, même pour $a = 0$, car $Y_m(x)$ est nul pour $x = 0$, et, d'après la formule de Maclaurin,

$$\Psi_3(x) = \Psi_3(0) + \frac{x}{1}\Psi_3'(0) + \ldots + \frac{x^p}{p!}\Psi^{(p)}(0) + \ldots$$

a ses coefficients rationnels.

Si, dans $\Psi_2(x)$, on remplace x^k par x^{m+k}, ou encore $Z_m(x)$ par $xZ_m(x)$, la série $\Psi_4(x)$ obtenue, ordonnée suivant les puissances croissantes de x, a encore ses coefficients rationnels.

Je me contenterai maintenant de considérer $\Psi_1(x)$: j'y prends le coefficient c_{n_1+k} de x^{n_1+k}, où $n_1 = 4n^2$; $Z_n(x)$ fournira dans ce coefficient le terme

$$\pm(1.2\ldots n)^{4n}\varphi_n^{-\lambda} r_n,$$

n étant d'ailleurs supposé pair; Z_{n+l}, avec l pair > 0, fournira un terme

$$\pm a_{n+l} r_{n+l} \varphi_{n+l}^{-\lambda},$$

avec (¹)

$$1 \leqq a_{n+l} \leqq (n+l)^{5(n+l)^2},$$

a_{n+l} étant $\neq 0$; donc

$$c_{n_1+k} = \pm (n!)^{4n} \varphi_n^{-\lambda} r_n \pm \ldots \pm a_{n+l} \varphi_{n+l}^{-\lambda} r_{n+l} \pm \ldots.$$

Je prends

$$(6_{10}\ bis) \qquad \varphi_m = b_2(m h_m) = b_3(m l_m),$$

où l_m ne décroît pas quand m est $> \mu$ ou croît, μ étant assez grand, et où $m l_m$ est entier. Je dis qu'alors, si $m \geqq n$,

$$(7_{10}) \qquad r_{m+1} a_{m+1} \varphi_{m+1}^{-\lambda} \leqq \varphi_m^{-\lambda m},$$

quand n est assez grand.

En effet, il suffit, si $r_m \leqq r$, r étant fini, en prenant les logarithmes (base b) des deux membres de (7_{10}),

$$(8_{10}) \qquad \lambda m b_2(m l_m) + \log r + 5(m+1)^2 \log(m+1) \leqq \lambda b_2[(m+1) l_m],$$

ou encore, ε étant fixe, positif et arbitraire, mais > 0,

$$b_2(m l_m)]^{1+\varepsilon} \leqq b_2[(m+1) l_m],$$

dès que m est assez grand, puisque

$$\lambda[b_2(m l_m)]^{1+\varepsilon} \geqq 2\lambda m b_2(m l_m) \geqq \lambda m b_2(m l_m) + \log r + 5(m+1)^2 \log(m+1),$$

dès que m est assez grand. Prenant encore les logarithmes des deux membres, il suffit

$$(1+\varepsilon)\, b^{m l_m} \leqq b^{(m+1) l_m},$$
$$1 + \varepsilon \leqq b^{l_m}.$$

Par hypothèse, l_m est limité inférieurement quel que soit m, en

---

(¹) Z_{n+l} a ses coefficients tous $\leqq (n+l)^{4(n+l)^2}$, et au plus $1 + 4(n+l)^2$ termes; dans Z_{n+l} le coefficient de x^{n_1+k} est au plus égal en valeur absolue à la somme des valeurs absolues des coefficients, c'est-à-dire que $|a_{n+l}| < (n+l)^{5(n+l)^2}$, dès que n est assez grand.

D'autre part, les coefficients de Z_{n+l}, pour les termes de degré pair, sont $\neq 0$. Le polynome Z_m a, en effet, ses racines réelles et deux à deux égales et de signes contraires; donc, tous les termes sont de degré pair.

De plus, d'après le théorème des lacunes (NIEWENGLOWSKI, *Algèbre de Math. spéc.*, t. II, 2ᵉ édit. 1891, p. 384), aucun des coefficients des termes de degré pair n'est nul.

sorte qu'on peut prendre n assez grand (m est $\geqq n$) pour que ε satisfasse à cette condition pour toute valeur de $m \geqq n$. On a ainsi, quand n est assez grand,

$$c_{n_1+k} = \pm (n!)^{kn} \varphi_n^{-\lambda} r_n \pm \ldots \pm r_m a_m \varphi_m^{-\lambda} + A_m = P_m \varphi_m^{-\lambda} + A_m,$$

où P_m est entier, puisque φ_m^{λ} divise φ_{m+1}^{λ}, et

$$|A_m| \leqq \varphi_m^{-\lambda m} + \varphi_{m+1}^{-\lambda(m+1)} + \ldots,$$

d'après (7_{10}). Chaque terme du second membre étant plus petit que le quart du précédent, puisque $\varphi_{m+1} \geqq \varphi_m > 4$,

$$|A_m| \leqq \varphi_m^{-\lambda m}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) \leqq \frac{4}{3}\varphi_m^{-\lambda m} \leqq \varphi_m^{-\frac{\lambda m}{2}},$$

et

$$|c_{n_1+k} - P_m \varphi_m^{-\lambda}| \leqq \varphi_m^{-\frac{\lambda m}{2}}.$$

Ceci posé, si c_{n_1+k} est nul ou rationnel, d'après l'inégalité précédente, à partir d'une certaine valeur de m, $c_{n_1+k} = P_m \varphi_m^{-\lambda}$, ce qui est impossible, puisqu'il y a une infinité de coefficients $a_m \neq 0$. L'application du théorème de Liouville (Chap. II) montre immédiatement que c_{n_1+k} n'est pas algébrique; donc c_{n+k} est un nombre transcendant de Liouville. Ainsi :

Les séries de polynomes $\Psi_1(x)$ satisfaisant à (6_{10} bis) ont, dans leur développement suivant les puissances croissantes de x, une infinité de coefficients transcendants de Liouville, au moins à partir d'un certain terme, et, néanmoins, elles prennent une valeur rationnelle pour toute valeur rationnelle réelle de x (1).

(1) Il existe des exemples simples de séries au moins en partie analogues; ainsi

$$\sin \pi x = \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{3!} + \frac{\pi^5 x^5}{5!} - \ldots,$$

qui a tous ses coefficients transcendants, et qui prend pour x rationnel réel $= \pm pq^{-1}$ la valeur $\pm \sin pq^{-1}\pi$. On sait, d'après l'expression de $\sin qz$ en fonction de $\sin z$ et $\cos z$, que $\sin z$ est racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels si $\sin qz$ est rationnel; en particulier, pour $z = pq^{-1}\pi$, $\sin p\pi = 0$ et $\pm \sin pq^{-1}\pi$ est algébrique. De même pour $\cos \pi x$.

On remarquera, en outre, que les séries $\sin \pi x$ et $\cos \pi x$ ont toutes leurs racines rationnelles.

Il serait bien intéressant de savoir si $\sin \pi x$ peut être transcendant ou non pour x algébrique.

Il semble possible de trouver des exemples de séries analogues ayant dans leur développement suivant les puissances croissantes de x des coefficients transcendants à partir d'un certain terme, et prenant pour toute valeur rationnelle ou algébrique, réelle ou non, de x une valeur rationnelle ou algébrique; la méthode que l'on vient d'utiliser pour Ψ_4 s'applique, en effet, aux fonctions

$$\Psi_5(x) = \mathrm{A} \pm x^k \sum_1^{\infty} r_m \psi_m^{-\lambda} \mathrm{Y}_m(x),$$

r_m, k, A, λ, ψ_m étant déterminés comme dans $\Psi_3(x)$ [formule (6_{10})]. Elle permet de voir que, parmi les coefficients de Ψ_5 développé suivant les puissances croissantes de x, il y en a une infinité qui sont rationnels ou transcendants, mais ne sont pas algébriques. Pour montrer qu'il y en a une infinité de transcendants, il resterait à montrer que les coefficients analogues à c_{n_1+k} sont de véritables séries, ce qui se vérifierait peut-être en faisant voir que le polynome $\mathrm{Y}_m(x)$ possède suffisamment de coefficients $\neq 0$.

Je résumerai une partie de ce qui vient d'être dit sous la forme suivante :

1° *Il y a (théorème I_5) des séries $f(x)$ dont le développement suivant les puissances croissantes de x a ses coefficients rationnels, et qui prennent pour toute valeur rationnelle ou algébrique de x (sauf pour $x = 0$) des valeurs transcendantes;*

2° *Il y en a aussi qui, au contraire, prennent, comme les polynomes, pour toute valeur rationnelle ou algébrique, réelle ou imaginaire, de x, une valeur de même nature; parmi ces dernières, il y en a qui sont telles que*

$$f(x+a) = f(a) + x f'(a) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

a ses coefficients $f^{(n)}(a)$ rationnels ou algébriques pour toute valeur rationnelle ou algébrique, réelle ou imaginaire, de x.

Il y a, d'autre part, des séries $f(x)$ de polynomes rationnels prenant pour toute valeur rationnelle réelle de x une valeur

rationnelle, et pour lesquels $f^{(n)}(a)$ est un nombre transcendant de Liouville pour une infinité de valeurs de n dès que n est assez grand. Dans leur développement suivant les puissances croissantes de x, les coefficients correspondants à partir d'un certain rang sont des nombres transcendants de Liouville.

CHAPITRE XI.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

Soit une suite de quantités

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots,$$

et le produit

$$\prod_n = u_1 u_2 \ldots u_n.$$

Si $\prod_n$ a une limite $\prod$ quand n croît indéfiniment, on dit que le produit infini

$$u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$$

est convergent; sa valeur est $\prod$: la convergence exige que u_n tende vers 1. Je supposerai ce produit absolument convergent, c'est-à-dire que l'on peut intervertir l'ordre des termes sans changer la valeur de $\prod$.

La condition nécessaire et suffisante pour la convergence absolue, c'est que la série

$$(1_{11}) \qquad \log u_1 + \log u_2 + \ldots + \log u_n + \ldots$$

converge absolument; mais

$$(2_{11}) \qquad \frac{\log u_n}{u_n - 1} = \frac{\log(1 + u_n - 1)}{u_n - 1}$$

tend vers 1 quand n croît indéfiniment, si u_n tend vers 1; la convergence absolue du produit $\prod$ entraîne celle de la série $\sum(u_n - 1)$. Réciproquement, si cette série converge absolument, u_n tend vers 1, les deux membres de (2_{11}) également, et (1_{11}) converge absolument, par suite aussi $\prod_n$ et $\prod$.

Je pose

$$(3_{11}) \qquad u_n = 1 + z z_n^{-1};$$

le produit

$$(4_{11}) \qquad \prod(z) = \prod(1 + z z_n^{-1})$$

est absolument convergent si la série $z \sum z_n^{-1}$, ou la série $\sum z_n^{-1}$ est absolument convergente, et réciproquement; il en sera bien ainsi, en désignant par r_n le module de z_n, si la série $\sum r_n^{-1}$ est convergente : je supposerai qu'il en soit ainsi. La convergence de $\prod(z)$ a lieu quel que soit z. Le produit de deux produits $\prod(z)$ absolument convergent est d'ailleurs absolument convergent [1].

Les séries $S_\chi = \sum z_n^{-\chi}$, où χ est entier $\geqq 1$, sont, *a fortiori*, absolument convergentes. On a

$$(5_{11}) \qquad \left\{ \begin{aligned} & S_1^2 - S_2 = 2 \sum (z_n z_{n_1})^{-1} \quad \text{où} \quad n \neq n_1, \\ & S_1^3 = 3 \sum z_n^{-1} z_{n_1}^{-2} + 6 \sum (z_n z_{n_1} z_{n_2})^{-1} + S_3 \\ & \quad = 3 S_1 S_2 - 2 S_3 + 6 \sum (z_n z_{n_1} z_{n_2})^{-1}, \\ & \text{où } n, n_1, n_2 \text{ sont différents, car} \\ & \qquad \sum z_n^{-1} z_n^{-2} = S_1 S_2 - S_3, \\ & \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

Ces calculs sont les mêmes, que le produit $\prod$ n'ait qu'un nombre

---

(1) $\prod(z)$ ne peut s'annuler pour une valeur de z sans qu'un de ses facteurs s'annule, car $\prod = \prod_1^n \prod_n^\infty : \prod_1^n$ n'est pas nul, si aucun de ses facteurs ne l'est; quant à $\prod_n^\infty$, pour n assez grand, son logarithme est aussi petit qu'on veut, et $\prod_n^\infty$ est aussi voisin qu'on veut de l'unité.

fini de termes, c'est-à-dire soit un polynome, ou que $\prod$ soit un produit infini. Il en résulte d'abord : 1° que les fonctions symétriques à coefficients rationnels de degré fini des z_n^{-1} convergent; 2° que leur calcul est identique à celui des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique, si l'on suppose connues, soit S_1, S_2, ..., c'est-à-dire les sommes des puissances semblables des racines des inverses des z_n, soit encore les séries

$$(6_{11})\qquad \begin{cases} c_1 = \sum z_n^{-1} = S_1, \\ c_2 = \sum (z_n z_{n_1})^{-1} = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2), \\ c_3 = \sum (z_n z_{n_1} z_{n_2})^{-1} = \frac{1}{6}(S_1^3 - 3S_1 S_2 + 2S_3). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

S_1, S_2, ... s'expriment rationnellement en fonction des c_m, et inversement.

On a alors

$$\prod_1^m (1 + z z_n^{-1}) = 1 + z \sum_1^m z_n^{-1} + z^2 \sum_1^m z_n^{-1} z_{n_1}^{-1} + \ldots,$$

et il semble qu'on ait le droit d'écrire, en faisant croître m indéfiniment, puisque $\sum_1^\infty z_n^{-1} z_{n_1}^{-1} \ldots z_{n_k}^{-1}$ converge,

$$\prod(z) = 1 + z \sum_1^\infty z_n^{-1} + z^2 \sum_1^\infty z_n^{-1} z_{n_1}^{-1} + \ldots,$$

quel que soit z. Je vais montrer qu'il en est bien ainsi en établissant le théorème suivant :

Théorème I_{11}. — *On a, quel que soit z,*

$$\prod(z) = \prod(1 + z z_n^{-1}) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

où c_n n'est autre que la somme des produits n à n des quantités $z_{n_1}^{-1}$. La série $1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$ est une fonction en-

tière : si ses coefficients sont rationnels, il en est de même des valeurs de $\sum\limits_1^\infty z_{n_1}^{-m}$ *pour toute valeur entière de* $m \geqq 1$, *et inversement.*

En effet, pour une valeur donnée de z, je considère $\prod\limits_{\nu_1}^{\nu_2}(1 + z z_n^{-1})$, où $\nu_1 > \nu$, et où ν est tel que $r_\nu > r = |z|$; on suppose $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \ldots$, r_n croissant indéfiniment avec n, puisque $\sum r_n^{-1}$ converge. Soit

$$z = r_\nu \zeta, \qquad z_n = r_\nu \zeta_n, \qquad |\zeta| = \rho < 1, \qquad |\zeta_n| = \rho_n, \qquad r_n = r_\nu \rho_n;$$

$$\prod_{\nu_1}^{\nu_2}(1 + z z_n^{-1}) = \prod_{\nu_1}^{\nu_2}(1 + \zeta\zeta_n^{-1});$$

les séries

$$z^\chi \sum r_n^{-\chi} = \zeta^\chi \sum \rho_n^{-\chi} \qquad \text{où} \qquad \chi \geqq 1,$$

convergent, par suite aussi

$$\zeta \sum \rho_n^{-1}, \quad \zeta^2 \sum (\rho_n \rho_{n_1})^{-1}, \quad \ldots.$$

On a

$$(7_{11}) \quad \prod_{\nu_1}^{\nu_2}(1 + \zeta\zeta_n^{-1}) = 1 + \zeta \sum_{\nu_1}^{\nu_2} \zeta_n^{-1} + \zeta^2 \sum_{\nu_1}^{\nu_2} (\zeta_n \zeta_{n_1})^{-1} + \ldots + \zeta^{\nu_2 - \nu_1 + 1}(\zeta_{\nu_1} \ldots \zeta_{\nu_2})^{-1},$$

et $|\zeta| = \rho < 1$. Quand ν_2 croît indéfiniment, on obtient dans le second membre la série

$$(8_{11}) \quad \varphi_{\nu_1}(\zeta) = 1 + \zeta \sum_{\nu_1}^{\infty} \zeta_n^{-1} + \zeta^2 \sum_{\nu_1}^{\infty} (\zeta_n \zeta_{n_1})^{-1} + \ldots = 1 + \gamma_1 \zeta + \gamma_2 \zeta^2 + \ldots,$$

dont chacun des termes est bien déterminé, d'après ce qui précède. Je dis que cette série converge absolument pour $\rho < 1$. En effet,

$$\left| \sum_{\nu_1}^{\infty} (\zeta_n \zeta_{n_1} \ldots \zeta_{n_\alpha})^{-1} \right|$$

reste limité quel que soit a, et, *a fortiori*,

$$\left|\sum_{\nu_1}^{\nu_2}(\zeta_n\zeta_{n_1}\ldots\zeta_{n_a})^{-1}\right|.$$

s'il en est de même de

$$\gamma'_a=\sum_{\nu_1}^{\infty}(\rho_n\rho_{n_1}\ldots\rho_{n_a})^{-1}.$$

Or

$$\gamma'_1=\sum_{\nu_1}^{\infty}\rho_n^{-1}=r_\nu\sum_{\nu_1}^{\infty}r_n^{-1}$$

converge, car

$$r_\nu\sum_{\nu_1}^{\infty}r_n^{1}$$

converge, et aussi

$$r_\nu\sum_{\nu}^{\infty}r_n^{-1}.$$

Si $\nu_1-\nu$ est assez grand,

$$\gamma'_1=r_\nu\sum_{\nu_1}^{\infty}r_n^{-1}$$

est plus petit que ε_{ν_1}, ε_{ν_1} tendant vers zéro quand ν_1 croît indéfiniment; d'ailleurs

$$\gamma'_1\gamma'_a=\sum_{\nu_1}^{\infty}\rho_n^{-1}\sum_{\nu_1}^{\infty}(\rho_n\rho_{n_1}\ldots\rho_{n_a})^{-1}>\sum_{\nu_1}^{\infty}(\rho_n\rho_{n_1}\ldots\rho_{n_{a+1}})^{-1}=\gamma'_{a+1};$$

faisant successivement

$$a=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

on voit que

$$\gamma'_1<\varepsilon_{\nu_1},\qquad \gamma'_2<\varepsilon_{\nu_1}^2,\qquad \ldots,\qquad \gamma'_a<\varepsilon_{\nu_1}^a,\qquad \ldots;$$

la série

$$1+\gamma'_1\zeta+\gamma'_2\zeta^2+\ldots$$

est absolument convergente, et son module au plus égal à

$$1+\varepsilon_{\nu_1}\rho+\varepsilon_{\nu_1}^2\rho^2+\ldots=\frac{1}{1-\varepsilon_{\nu_1}\rho},$$

puisque

$$\rho = |\zeta| < 1.$$

La série (8_{11}) est donc aussi absolument convergente quand $\rho < 1$, et

$$\varphi_{\nu_1}(\zeta) = 1 + \eta_{\nu_1},$$

η_{ν_1} tendant vers zéro quand ν_1 croît indéfiniment.

D'autre part, $\prod_n$ a pour limite $\prod$; c'est dire que $\prod \prod_{\nu_1}^{-1}$ tend vers l'unité quand ν_1 croît indéfiniment, et que

$$\prod = \prod_{\nu_1} (1 + \varepsilon'_{\nu_1}),$$

avec $\lim \varepsilon'_{\nu_1} = 0$ pour $\nu_1 = \infty$; ν_1 étant choisi fixe et assez grand, $|\varepsilon'_{\nu_1}|$ est plus petit qu'une quantité positive quelconque donnée *a priori*.

Je forme $\prod_{\nu_1} \varphi_{\nu_1}(\zeta)$; pour cela, je multiplie d'abord $\varphi_{\nu_1}(\zeta)$ par $(1 + \zeta\zeta_{\nu_1-1}^{-1})$, ce qui me donne comme résultat une série absolument convergente qui se trouve être $\varphi_{\nu_1-1}(\zeta)$; je continue de la sorte, et j'ai

$$\varphi_{\nu_1}(\zeta) \prod_{\nu_1} = \varphi_1(\zeta),$$

où $\varphi_1(\zeta)$ converge absolument pour $|\zeta| < 1$. Mais

$$(9_{11}) \quad \begin{cases} \varphi_1(\zeta) = 1 + \zeta \sum_1^\infty \zeta_n^{-1} + \zeta^2 \sum_1^\infty (\zeta_n \zeta_{n_1})^{-1} + \ldots \\ \quad = 1 + z \sum_1^\infty z_n^{-1} + z^2 \sum_1^\infty (z_n z_{n_1})^{-1} + \ldots \\ \quad = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_m z^m + \ldots = \varphi(z); \end{cases}$$

$\varphi(z)$ converge absolument pour cette valeur de z, et

$$\varphi(z) = \varphi_{\nu_1}(\zeta) \prod_{\nu_1} = \prod (1 + \varepsilon'_{\nu_1})^{-1}(1 + \eta_{\nu_1}).$$

Quand ν_1 est assez grand, $(1 + \varepsilon'_{\nu_1})^{-1}(1 + \eta_{\nu_1})$ diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité; il est donc absurde de supposer

$$\varphi(z) \left[\prod (z) \right]^{-1}$$

différent de 1, c'est-à-dire que

$$(10_{11}) \qquad \prod(z) = \prod_1^\infty (1 + z z_n^{-1}) = \varphi(z).$$

Cette dernière égalité a lieu quand $\bmod z < r_\nu$; en donnant à ν une valeur convenable, on voit qu'elle a lieu pour toute valeur de z, et que $\varphi(z)$ converge absolument quel que soit z. Donc la série $\varphi(z)$ est une fonction entière.

Si d'ailleurs les coefficients de cette série sont rationnels, il en est de même des quantités $\sum_1^\infty z_n^{-m}$, d'après les formules (6_{11}), et inversement. C. Q. F. D.

Ce théorème montre que le produit $\prod_n$ peut être développé et ordonné suivant les puissances croissantes de z d'après les mêmes règles, que n soit fini ou infini, c'est-à-dire que $\prod_n$ soit un polynome ou un produit infini. On doit donc s'attendre à trouver des propriétés communes aux polynomes et aux produits infinis étudiés ici : les formules (5_{11}) et (6_{11}) le montrent bien.

En particulier, dans (6_{11}), les coefficients c_n sont ceux de la série $\varphi(z)$, et il semble que l'on puisse établir entre les c_n et les S_n des formules de récurrence analogues à celles de Newton pour les polynomes.

On pourrait chercher à le vérifier de proche en proche à l'aide de (5_{11}) et (6_{11}); je préfère procéder comme il suit.

Supposant $|z z_m^{-1}| < 1$, ce qui est possible, puisque toutes les racines z_m sont $\neq 0$, on aura

$$(1 + z z_m^{-1})^{-1} = 1 - z z_m^{-1} + (z z_m^{-1})^2 + \ldots,$$

la série du second membre étant absolument convergente;

$$\log \prod_n (z) = \sum_1^n \log(1 + z z_m^{-1}),$$

$$\frac{\prod_n'(z)}{\prod_n(z)} = \sum_1^n z_m^{-1}(1 + z z_m^{-1})^{-1} = z_m^{-1} - z z_m^{-2} + z^2 z_m^{-3} - \ldots$$
$$= S_{1n} - z S_{2n} + z^2 S_{3n} - \ldots,$$

en désignant par S_{jn} la somme des puissances $j^{\text{ièmes}}$ des inverses des racines $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Je pose

$$\prod_n(z) = 1 + \delta_{1n} z + \delta_{2n} z^2 + \ldots + \delta_{jn} z^j + \ldots,$$

où évidemment

$$\delta_{jn} = \sum_1^n (z_{m_1} z_{m_2} \ldots z_{m_j})^{-1};$$

on a

$$\begin{aligned}\prod_n{}'(z) &= \delta_{1n} + 2\delta_{2n} z + \ldots + j\delta_{jn} z^{j-1} + \ldots \\ &= (1 + \delta_{1n} z + \ldots + \delta_{jn} z^j + \ldots)(S_{1n} - z S_{2n} + z^2 S_{3n} - \ldots).\end{aligned}$$

En identifiant, on obtient les formules

$$\begin{gathered}\delta_{1n} = S_{1n}, \qquad 2\delta_{2n} = S_{1n}\delta_{1n} - S_{2n}, \qquad \ldots, \\ j\delta_{jn} = S_{1n}\delta_{(j-1)n} - S_{2n}\delta_{(j-2)n} + \ldots + (-1)^{j-2} S_{(j-1)n}\delta_{1n} + (-1)^{j-1} S_{jn}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

où $\delta_{0n} = 1$. Ces formules peuvent encore s'écrire

$$\begin{gathered}-S_{1n} + \delta_{1n} = 0, \\ S_{2n} - S_{1n}\delta_{1n} + 2\delta_{2n} = 0, \\ -S_{3n} + S_{2n}\delta_{1n} - S_{1n}\delta_{2n} + 3\delta_{3n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (-1)^j S_{jn} + (-1)^{j-1} S_{(j-1)n}\delta_{1n} + \ldots + (-1) S_{1n}\delta_{(j-1)n} + j\delta_{jn} = 0.\end{gathered}$$

Or ces formules restent exactes pour toutes les valeurs de $j \leqq J$, J étant arbitraire, si grand que soit n.

On sait, d'autre part, que, lorsque n croît indéfiniment, S_{jn} a pour limite S_j, δ_{jn} pour limite c_j. Par conséquent, on voit, en prenant au besoin n assez grand, qu'il est absurde de supposer l'inexactitude des formules

$$(11_{11}) \quad \left\{\begin{aligned} -S_1 + c_1 &= 0, \\ S_2 - c_1 S_1 + 2c_2 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ (-1)^j S_j + (-1)^{j-1} c_1 S_{j-1} + \ldots + (-1) c_{j-1} S_1 + j c_j &= 0,\end{aligned}\right.$$

quand $j \leqq J$, car aucun des premiers membres ne peut avoir une valeur $\neq 0$. J étant arbitraire, on aboutit à ce théorème [1].

THÉORÈME II_{11}. — *Les formules* (11_{11}) *analogues à celles de Newton pour le calcul des sommes des puissances semblables des inverses des racines d'une équation algébrique en fonction des coefficients, sont applicables aux produits infinis*

$$(4_{11}) \qquad \prod(1+zz_n^{-1}) = \varphi(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

tels que la série $\sum_1^\infty r_n^{-1}$, *où* $r_n = |z_n|$, *soit convergente.*

Ici se pose une question intéressante, dont la solution est immédiate pour les polynomes, mais exige quelques développements pour les produits infinis : parmi les séries $\varphi(z)$, y en a-t-il pour lesquelles on a

$$S_m = 0 \qquad \text{pour} \qquad m \geqq \mu ?$$

Pour traiter cette question, je m'appuierai sur le lemme préliminaire suivant [2] :

LEMME. — *Si une série à termes positifs non croissants*

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n + \ldots$$

est convergente, on a, pour $n = \infty$,

$$\lim n\nu_n = 0 :$$

$n\nu_n$ *est donc toujours limité, quel que soit* n.

En effet, j'admets que cette condition ne soit pas remplie : pour une infinité de valeurs de n, on a

$$n\nu_n > \delta \qquad (\text{où } \delta \text{ est positif fixe}).$$

(1) Des formules analogues ont été indiquées par M. Pincherle (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, série II, Vol. XI, fasc. VIII, 9 mai 1878).

(2) BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*. Paris, Gauthier-Villars, 1900, p. 17.

Il y a, en particulier, une infinité de valeurs

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p, \quad \ldots$$

de n satisfaisant à cette inégalité, et telles que

$$n_i > 2n_{i-1}, \qquad n_i - n_{i-1} > n_i - \frac{n_i}{2} = \frac{n_i}{2}.$$

Alors

$$\nu_{n_1} > \delta n_1^{-1}, \qquad \nu_{n_2} > \delta n_2^{-1}, \qquad \ldots,$$

$$\nu_{n_{i-1}} + \nu_{n_{i-1}+1} + \ldots + \nu_{n_i - 1} \geqq \nu_{n_i}(n_i - n_{i-1}) > \nu_{n_i}\frac{n_i}{2} > \frac{\delta}{2},$$

puisque $\nu_{n+1} \leqq \nu_n$. La somme de la série comprendrait une infinité de sommes $> \frac{\delta}{2}$, et la série serait divergente. C. Q. F. D.

Je considère alors une série ayant pour zéros les quantités $-z_1$, $-z_2, \ldots, -z_n, \ldots$, en nombre infini ($r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \ldots$), et telle que, si $r_n = |z_n|$, $\sum r_n^{-j}$ converge dès que $j \geqq a \geqq 1$ (¹). Je dis qu'on ne peut avoir $\sum z_m^{-i} = 0$ quel que soit i, dès que $i \geqq \mu$, à moins que les séries en question n'aient aucune racine de module fini.

En effet, soit, si ceci a lieu,

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_k < r_{k+1} \leqq r_{k+2} \leqq \ldots.$$

On a

$$\sum z_m^{-l} = z_1^{-l} + \ldots + z_k^{-l} + z_{k+1}^{-l} + z_{k+2}^{-l} + \ldots.$$

D'après le lemme précédent, $r_1^a \sum r_m^{-a}$ étant une série convergente à termes positifs non croissants, $r_m^{-a} r_1^a m$ tend vers zéro quand m croît indéfiniment et a une limite supérieure λ^{-1} :

$$r_m^{-a} r_1^a m < \lambda^{-1}, \qquad r_m r_1^{-1} > (\lambda m)^{a^{-1}}.$$

De plus,

$$r_m r_1^{-1} > (1 - \varepsilon)^{-1} \qquad \text{avec } \varepsilon \text{ fixe} > 0,$$

(¹) On sait que c'est le cas de toutes les fonctions entières d'ordre fini.

dès que $m > k$. Soit m_1 la plus petite valeur de m telle que $(\lambda m)^{a^{-1}} > (1-\varepsilon)^{-1}$; on a

$$r_m^{-l} < r_1^{\,l}(\lambda m)^{-la^{-1}}, \qquad r_m^{-l} < r_1^{-l}(1-\varepsilon)^l,$$

$$r_{k+1}^{-l} + r_{k+2}^{-l} + \ldots < r_1^{-l}\left[m_1(1-\varepsilon)^l + \sum_{m_1}^{\infty}(\lambda m)^{-la^{-1}}\right].$$

La série $\sum\limits_{m_1}^{\infty}(\lambda m)^{-la^{-1}}$ converge pour la valeur $l = l_1 \geqq a$, et chaque terme est < 1. Pour toute valeur $l = l_1 l_2$, l_2 étant assez grand, entier ou non, chaque terme de cette série est aussi petit qu'on veut par rapport au terme correspondant de la série $\sum\limits_{m_1}^{\infty}(\lambda m)^{-l_1 a^{-1}}$; de même alors $m_1(1-\varepsilon)^l$ est aussi petit qu'on veut. Donc, quand l est assez grand,

$$r_{k+1}^{-l} + r_{k+2}^{-l} + \ldots < r_1^{-l}\varepsilon_l,$$

avec $\lim \varepsilon_l = 0$ pour $l = \infty$. Par suite alors

$$\sum z_m^{-l} = z_1^{-l} + \ldots + z_k^{-l} + r_1^{-l}\varepsilon_l',$$

avec $\lim |\varepsilon_l'| = 0$ pour $l = \infty$.

Si

$$z_m = r_1 e^{i\theta_m} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqq m \leqq k,$$

$$\sum z_m^{-l} = r_1^{-l}(e^{-il\theta_1} + \ldots + e^{-il\theta_k} + \varepsilon_l') = 0,$$

dès que l est assez grand; on en tire

$$e^{-il\theta_1} + \ldots + e^{-il\theta_k} + \varepsilon_l' = 0.$$

Je pose

$$e^{-i\theta_m} = y_m \qquad \text{pour} \qquad m \leqq k,$$

d'où

$$y_1^l + \ldots + y_k^l + \varepsilon_l' = 0.$$

Soient maintenant $y_1, \ldots, y_{k_1}$ celles des quantités $y_1, \ldots, y_k$ qui sont distinctes; on aura

$$\begin{array}{l} a_1 y_1^l + \ldots + a_{k_1} y_{k_1}^l + \varepsilon_l' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 y_1^{l+k_1-1} + \ldots + a_{k_1} y_{k_1}^{l+k_1-1} + \varepsilon_{l+k_1-1}' = 0, \end{array}$$

où $a_1, \ldots, a_{k_1}$ sont des entiers positifs tels que $a_1 + \ldots + a_{k_1} = k$. Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^l & \ldots & y_{k_1}^l \\ \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ y_1^{l+k_1-1} & \ldots & y_{k_1}^{l+k_1-1} \end{vmatrix} = y_1^l \ldots y_{k_1}^l \Delta',$$

où Δ' est le produit $\pm(y_{k_1} - y_1)\ldots(y_{k_1} - y_{k_1-1})(y_{k_1-1} - y_1)\ldots$; on a $|y_1| = 1, \ldots, |y_{k_1}| = 1$, et le module $|\Delta| = |\Delta'|$ de ce déterminant est indépendant de l; l'on conclurait

$$-a_1\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon'_l & y_2^l & \ldots & y_{k_1}^l \\ \cdot\cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon'_{l+k_1-1} & y_2^{l+k_1-1} & \ldots & y_{k_1}^{l+k_1-1} \end{vmatrix}.$$

Pour toutes les valeurs de l qui dépassent une certaine limite, les coefficients de $\varepsilon'_l, \ldots, \varepsilon'_{l+k_1-1}$ dans cette expression ont une limite supérieure de leur module indépendante de l, puisque $y_1, \ldots, y_{k_1}$ ont un module égal à 1. Quand l croît indéfiniment, le second membre peut être rendu aussi petit qu'on veut, alors que le premier est fixe ; on est donc conduit à une absurdité. Par conséquent, pour toutes les fonctions considérées (pour toutes les fonctions entières d'ordre fini ayant une infinité de racines), en particulier pour celles où $\sum r_m^{-1}$ converge, il y a une infinité des quantités S_n qui sont $\neq 0$. Le raisonnement précédent montre même que, dès que n est assez grand, s'il y a k_1 racines distinctes de module minimum r_1, il ne peut y avoir k_1 quantités S_n d'indices consécutifs nulles. Si $k_1 = 1$, les S_n sont toutes $\neq 0$ dès que n est assez grand.

Une propriété analogue ayant lieu pour les polynomes, par suite pour les fonctions entières n'ayant qu'un nombre fini de racines (exemple $(x-1)e^x$), je conclus ce théorème :

Théorème III_{11}. — *Soit une série $f(z)$ dont les racines $-z_1, \ldots, -z_n, \ldots$, ont pour modules $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, en nombre fini > 0 ou infini, les séries $\sum r_n^{-j}$ convergeant dès que $j \geqq a \geqq 1$; ce sera le cas, par exemple, pour $\varphi(z)$ ou pour un polynome (et pour les fonctions entières d'ordre fini). Parmi les sommes des puissances*

semblables des inverses des racines, il y en a une infinité qui ont une valeur $\neq 0$ (¹).

Je vais tirer quelques conséquences des théorèmes précédents : d'après ce qu'on a vu (théorème II_{11}), les fonctions symétriques à coefficients entiers ou rationnels de degré fini des z_n^{-1} s'exprimeront en fonction rationnelle des coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, à coefficients entiers ou rationnels respectivement : les exposants des z_n^{-1} sont, bien entendu, supposés tous positifs et les quantités $-z_n$ racines d'une fonction $\varphi(z)$ considérée au théorème II.

J'appellerai *fonction symétrique élémentaire* une fonction symétrique de la forme

$$\sum z_n^{-\beta} z_{n_1}^{-\beta_1} \ldots z_{n_a}^{-\beta_a}.$$

Elle est égale à un polynome à coefficients entiers, formé avec c_1, $c_2, \ldots, c_\lambda$, où $\lambda = \beta + \beta_1 + \ldots + \beta_a$. Tout polynome P' à coefficients entiers ou rationnels formé avec des fonctions symétriques élémentaires, et de degré λ_1 par rapport aux z_m^{-1}, est un polynome à coefficients (²) entiers ou rationnels formé avec les coefficients $c_1, c_2, \ldots$, c_{λ_1}. Son expression est identiquement la même que celle de la fonction symétrique correspondante pour l'équation

$$1 + c_1 z + \ldots + c_{\lambda_1} z^{\lambda_1} = 0.$$

Les fonctions symétriques à coefficients rationnels ont donc une valeur rationnelle lorsque les coefficients de la série sont rationnels.

Si les coefficients qui interviennent sont des nombres rationnels ou des nombres de Liouville de même espèce [théorème II_5 et note (²) corrélative], la fonction symétrique a pour valeur un nombre de Liouville de même espèce.

Plus généralement, si les coefficients qui interviennent appartiennent à un ensemble ou groupe de nombres tels que les quatre opérations arithmétiques fondamentales, effectuées sur les nombres

---

(¹) Les seules fonctions entières d'ordre fini qui ne jouissent pas de cette même propriété sont de la forme $e^{P(z)}$, où $P(z)$ est un polynome.

(²) *Voir* au besoin la méthode de Waring dans l'*Algèbre supérieure* de Serret, t. II, 5ᵉ édition, 1885, p. 385.

du groupe, ne donnent que des nombres du groupe, autrement dit à un ensemble constituant un groupe (Chap. III, p. 33) par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique; la fonction symétrique a encore pour valeur un nombre du groupe. *Il y a ici identité au point de vue des fonctions symétriques entre les polynomes et les séries* $\varphi(z)$.

Mais une remarque importante doit être faite, qui pourrait conduire à la définition des nombres entiers transcendants par analogie avec celle des nombres entiers algébriques. Quand on met un polynome sous la forme $\varphi(z)$, où le terme indépendant de z est l'unité, la fonction symétrique P' à coefficients entiers, considérée tout à l'heure, est un polynome à coefficients entiers formé avec c_1, $c_2, \ldots,$ c_{λ_1}. Quand les coefficients entiers de cette fonction symétrique ont tous leurs modules $\leqq \gamma$, on voit qu'en général, si $|c_{n-1}^{-1}|$ est assez petit dès que n est assez grand, et c_n de la forme $\pm p_n q_n^{-1}$ (p_n, q_n entiers premiers entre eux), la valeur numérique P'_1 de P' sera un nombre rationnel non entier, ceci, que $\varphi(z)$ soit un polynome ou une série.

Quand $\varphi(z)$ est un polynome

$$(12_{11}) \qquad 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_k z^k = 0,$$

tel que l'on puisse, grâce à la multiplication par un entier N_k convenable, faire en sorte que $N_k c_k = \pm 1$ et que les autres coefficients soient entiers, c'est-à-dire quand les racines de ce polynome sont des entiers ordinaires ou algébriques, on a $N_k c_k = \pm N_k p_k q_k^{-1} = \pm 1$, $p_k = \pm 1$, $N_k = q_k$. Les coefficients c_1, c_2, ..., c_k sont de la forme $p_n q_n^{-1}$ ($n = 1, 2, \ldots, k$) où $p_k = \pm 1$, et où q_n divise q_k. Alors P'_1, multiplié par une certaine puissance l de q_k, donne $P'_1 q_k^l =$ entier; ici on peut prendre $l = \lambda_1$.

Peut-on penser à quelque chose d'analogue lorsque $\varphi(z)$ est une série? On voit bien que, si les coefficients c_1, c_2. ..., c_k sont de la même forme que pour le polynome (12_{11}), $P'_1 q_k^l$ sera un nombre entier tant que $\lambda_1 \leqq k$; mais l'on ne pourra plus rien affirmer lorsque $\lambda_1 > k$. Toutefois, si, à partir d'une certaine valeur de n pour une infinité de valeurs n_1 de n, c_{n_1} est de la forme $\pm q_{n_1}^{-1}$, et si, quel que soit $n < n_1$, q_n divise q_{n_1}, on voit que, pour une infinité de valeurs de λ_1,

$$P'_1 q_{\lambda_1}^{\lambda_1}$$

sera entier dès que l_{λ_1} est assez grand (on peut prendre $l_{\lambda_1} = \lambda_1$). Il semble ainsi, mais ce n'est là, en somme, jusqu'à nouvel ordre, qu'une hypothèse, que si, parmi les séries $\varphi(z)$, il y en a dont les racines puissent *toutes* jouer le rôle d'*entier transcendant,* elles devront satisfaire aux conditions que l'on vient de trouver : *il faudra que, pour une infinité de valeurs n_1 de n, $c_{n_1} = \pm q_{n_1}^{-1}$* (¹), *et que q_n divise q_{n_1} pour $n < n_1$.*

Tout au moins pourra-t-on songer à voir, en désignant par $\varphi_2(z)$ celle des séries satisfaisant à ces conditions, si leurs racines ne peuvent jouer le rôle d'entiers transcendants.

La première chose à examiner sera la question de savoir si, parmi elles, on ne peut en trouver un ou plusieurs ensembles tels que les racines qui y sont comprises forment un groupe par rapport aux trois premières opérations fondamentales de l'Arithmétique, addition, soustraction et multiplication.

Je demanderai ici qu'on admette le théorème suivant (²) :

Soit

$$\varphi(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

une fonction entière dont la convergence est suffisamment rapide; toute racine de $\varphi(z) = 0$ est la limite d'une racine des polynomes (12_{11}) *lorsque k croît indéfiniment.*

C'est en particulier le cas quand $\varphi(z)$ est de la forme $e^z + a$, ou encore des formes (10_1) à (12_4).

Dans ces conditions, chaque racine des séries $\varphi_2(z)$ peut être regardée comme limite d'une suite d'entiers algébriques racines des équations (12_{11}), où k prend une série de valeurs n_1, n_2, ..., indéfiniment croissantes.

On aperçoit dès lors un autre moyen, qui peut être plus général, de définir l'entier transcendant :

Tout nombre transcendant limite d'une suite indéfinie d'entiers algébriques pourra être dit *entier transcendant.*

(¹) L'ensemble de ces séries et celui de leurs racines ont d'ailleurs la puissance du continu au sens de la théorie de M. Cantor (comp. *Acta math.*, t. XXIX, p. 328-331).

(²) *Journal de Mathématiques,* 1902, p. 343, et *Bulletin de la Société mathématique,* 1903, p. 43.

Avec cette définition, la somme, la différence et le produit soit de deux entiers transcendants, soit d'un entier transcendant et d'un entier ordinaire ou algébrique, seraient des entiers ordinaires, algébriques ou transcendants, car ce sont des limites d'une suite indéfinie d'entiers algébriques; le produit de deux entiers, ordinaires ou algébriques, est, en effet, un entier ordinaire ou algébrique.

Comme exemples d'entiers transcendants avec les deux définitions ci-dessus, on peut citer les diverses valeurs de $\mathrm{L}pq^{-1}$, où p, q sont des entiers premiers entre eux, car $x = \mathrm{L}pq^{-1}$ est racine de

$$e^x = pq^{-1} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

et limite d'une suite d'entiers algébriques racines des équations de la forme $\varphi_2(z)$

$$pq^{-1} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}, \qquad n \geqq q.$$

($\mathrm{L}pq^{-1} \pm \mathrm{L}p_1 q_1^{-1}$ est aussi un entier transcendant; il resterait à former des séries convergentes à coefficients rationnels dont $\mathrm{L}pq^{-1})(\mathrm{L}p_1 q_1^{-1})$ est racine ([1]).

En particulier, quand $q = 1$, $\mathrm{L}p$ est entier transcendant; de même, πi, étant racine de

$$0 = 1 + e^y = 2 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots + \frac{y^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

est un entier transcendant; de même encore $-i \times \pi i = \pi$. Donc :

Avec les deux définitions de l'entier transcendant, le nombre π est un entier transcendant.

Malheureusement, la seconde définition est inadmissible ([2]); je vais, en effet, montrer que *tout nombre transcendant réel est limite d'une suite d'entiers algébriques.*

([1]) D'après un examen rapide, je pense que la méthode d'élimination de Sylvester doit suffire soit dans ce cas, soit dans les problèmes analogues relatifs aux séries (10_4) à (12_4), ou peut-être même à toute fonction entière. — Il reste ici une question importante à résoudre : *Tout nombre transcendant est-il le quotient de deux entiers transcendants ?*

([2]) A moins peut-être d'introduire une condition complémentaire.

Soit α un entier algébrique réel, $p_n q_n^{-1}$ une des réduites de son développement en fractions continues : on a

$$|\alpha - p_n q_n^{-1}| < q_n^{-1} q_{n+1}^{-1}$$

d'après (7), et, si

$$\beta_n = \alpha q_n - p_n, \qquad |\beta_n| < q_{n+1}^{-1}.$$

β_n est un entier algébrique réel de module aussi petit qu'on veut dès que n est assez grand. Soit ξ un nombre transcendant réel quelconque : ξ sera compris entre $\varpi_n \beta_n$ et $(\varpi_n + 1)\beta_n$, où ϖ_n est un entier ordinaire, et

$$|\xi - \varpi_n \beta_n| \leqq |\beta_n| < q_{n+1}^{-1};$$

en donnant à n une suite de valeurs croissant indéfiniment, on voit que ξ est la limite des entiers algébriques $\varpi_n \beta_n$ (la conclusion reste d'ailleurs vraie quand ξ est un nombre algébrique réel fractionnaire).

Mais il y aurait à approfondir la première définition.

C'est ici le lieu d'indiquer l'impossibilité d'adopter pour le nombre entier transcendant une autre définition à laquelle on pourrait songer.

Soit encore α un entier algébrique racine de

$$z^p - a_1 z^{p-1} - \ldots - a_p = 0,$$

$a_1, \ldots, a_p$ entiers positifs ou négatifs. α^{-1} est racine de

$$1 - a_1 x - \ldots - a_p x^p = 0;$$

réciproquement, toute racine d'une équation de cette dernière forme est l'inverse d'un entier algébrique. Cependant on ne peut songer à définir l'entier transcendant réel positif < 1 par ce fait seul qu'il est racine d'une équation de la forme

$$1 - c_1 x - \ldots - c_n x^n - \ldots = 0,$$

avec $c_k, \ldots, c_n, \ldots$ entiers. On a vu, en effet, au Chapitre IV [formule (3)] que tout nombre transcendant réel de module < 1 est racine d'une équation de cette forme.

Fonctions symétriques de degré infini. — Ce qui précède s'applique aux fonctions symétriques de degré fini; mais on peut considérer aussi des fonctions symétriques des z_n^{-1} de degré infini, même quand $\varphi(z)$ est un polynome. Je pose $z_n^{-1} = \alpha_n$.

1° On pourra considérer quelques-uns $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_i}$ des α_n, et former avec un polynome à coefficients entiers ou rationnels

$$P(\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_i});$$

quand les α_n sont en nombre limité, c'est-à-dire quand ce sont les racines d'une équation algébrique, on peut considérer les fonctions symétriques formées avec les diverses valeurs de

$$P(\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_i}),$$

en remplaçant les diverses racines $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_i}$ par des racines quelconques distinctes de toutes les manières possibles; on pourra, par exemple, prendre le produit de toutes ces valeurs de P. Quand les α_n sont racines d'une des séries (9_{11}), y a-t-il quelque chose d'analogue?

On peut répondre affirmativement. Je vais considérer, à titre d'exemple, le produit

$$\prod P(\alpha_{n_1}),$$

où $P(\alpha_{n_1})$ est un polynome en α_n; mais j'admettrai, si a_d est le terme indépendant de α_{n_1} dans $P(\alpha_{n_1})$, supposé $\neq 0$, que l'on ait divisé au préalable tous les termes par a_d. Autrement dit, je ne considère que des polynomes $P(\alpha_{n_1})$ où le coefficient indépendant de α_{n_1} est l'unité.

Je vais donc étudier

$$\prod_1^n P(\alpha_m) = \prod_n (a_0\alpha_m^d + a_1\alpha_m^{d-1} + \ldots + a_d),$$

où les $|a_j|$ sont tous rationnels et $a_d = 1$. Je me place, bien entendu, dans le cas [1] où aucun des polynomes $P(\alpha_m)$ n'est nul, c'est-à-dire qu'aucun des α_m n'est racine de

$$a_0x^d + a_1x^{d-1} + \ldots + a_d = 0.$$

---

[1] Exemples : *C. R.*, 9 déc. 1901, 2ᵉ sem., p. 989; *Acta Math.*, t. XXIX, 1905, p. 328; série cos x.

Ce produit convergera absolument à la condition nécessaire et suffisante qu'il en soit de même de

$$\sum_1^n (a_0 \alpha_m^d + a_1 \alpha_m^{d-1} + \ldots + a_d - 1)$$

quand n croît indéfiniment. Or on a

$$\sum_1^n = a_0 \sum_1^n \alpha_m^d + a_1 \sum_1^n \alpha_m^{d-1} + \ldots + a_{d-1} \sum_1^n \alpha_m + n(a_d - 1).$$

Les d premiers termes du second membre restant finis quand n croît indéfiniment, il faut que $a_d = 1$; cette condition est d'ailleurs suffisante (¹); c'est celle que j'ai supposée au début.

On remarquera que, si $\prod_1^n P(\alpha_m)$ converge absolument, il ne saurait en être de même de $\sum_1^n P(\alpha_m)$, car les séries

$$\sum_1^n P(\alpha_m) \quad \text{et} \quad \sum_1^n [P(\alpha_m) - 1]$$

devraient être simultanément absolument convergentes, alors que la différence est n qui croît indéfiniment.

Si le coefficient a_d était nul, on prendrait le premier des coefficients a_{d-1}, a_{d-2}, ... qui est $\neq 0$; soit a_{d-d_1} ce coefficient; on pourra former le produit absolument convergent

$$\prod [P(\alpha_m) \alpha^{-d_1} a_{d-d_1}^{-1}].$$

(¹) Les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence du produit

$$\prod_n P(\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_i})$$

sont évidemment les mêmes. Il convient de supposer ici que l'on prend $n_1, n_2, \ldots, n_i \leqq n$ de toutes les manières possibles, puis que l'on fait croître n indéfiniment; on doit supposer $a_d = 1$.

2° Je considère, au contraire, le cas où (¹)

$$Z_m^{-1} = P(\alpha_m) = C_1\alpha_m + C_2\alpha_m^2 + \ldots + C_n\alpha_m^n + \ldots,$$

$P(\alpha_m)$ étant une fonction entière de α_m. Les Z_m sont racines de l'équation

$$\Phi(Z) = \prod[1 - ZZ_m^{-1}] = 1 + u_1 Z + \ldots + u_n Z^n + \ldots,$$

pourvu que

$$\sum R_m^{-1},$$

où

$$R_m = |Z_m|,$$

soit convergent. Or, il en est bien ainsi, car

$$\sum R_m^{-1} < \sum (C'_1 r_m^{-1} + C'_2 r_m^{-2} + \ldots + C'_n r_m^{-n} + \ldots),$$

où $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n, \ldots$ sont les modules de $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$. La série

$$s = C'_1 \sum r_m^{-1} + C'_2 \sum r_m^{-2} + \ldots + C'_n \sum r_m^{-n} + \ldots$$

est convergente; en effet, $\sum r_m^{-n}$ comprend un nombre de termes plus grands que 1 (ceux pour lesquels $r_m < 1$) en nombre limité λ, dont la somme est $\leqq \lambda (r_1^{-1})^n$; les autres ont une somme finie $\leqq \lambda'$, qui décroît lorsque n croît. Donc

$$s \leqq \lambda(C'_1 r_1^{-1} + \ldots + C'_n r_1^{-n} + \ldots) + \lambda'(C'_1 + \ldots + C'_n + \ldots).$$

Le second membre est évidemment une fonction entière de r_1^{-1} et converge toujours. Dès lors $\Phi(Z)$ est absolument convergent.

Toute fonction symétrique des Z_n^{-1} de degré fini, à coefficients rationnels, s'exprime en fonction rationnelle à coefficients rationnels des coefficients $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, d'après le théorème II_1, et ce qu'on a vu tout à l'heure.

(¹) On suppose, bien entendu, tous les $P(\alpha_m) \neq 0$, ce qui est possible d'une infinité de manières (*Acta mathem.*, t. XXIX, p. 328-331).

Or

$$u_1 = \sum Z_m^{-1} = C_1 \sum \alpha_m + C_2 \sum \alpha_m^2 + \ldots + C_n \sum \alpha_m^n + \ldots,$$
$$u_1 = C_1 S_1 + C_2 S_2 + \ldots + C_n S_n + \ldots.$$

L'équation $\varphi(z) = 0$, dont les α_m, en nombre fini ou infini, sont racines, étant donnée avec des coefficients rationnels, on voit que, pour une décroissance assez rapide des $C'_n = |C_n|$, les C_n étant, par exemple, tous $\neq 0$ et rationnels, u_1 est un nombre transcendant de Liouville.

En effet, soit

$$\sigma_m = \pm p_m q_m^{-1} = C_1 S_1 + \ldots + C_m S_m,$$

où p_m, q_m sont des entiers premiers entre eux; on a, pour une infinité de valeurs de m, d'après le théorème III_{11},

$$S_{m+1} \neq 0$$

et, si C'_n décroît assez vite quand n croît,

$$u_1 - \sigma_m = C_{m+1} S_{m+1}(1 + \varepsilon_{m+1}) \qquad (\lim \varepsilon_{m+1} = 0 \text{ pour } m = \infty),$$
$$|u_1 - \sigma_m| < q_m^{-\alpha},$$

si grand que soit α dès que m est assez grand. Donc u_1 n'est pas algébrique. D'autre part, u_1 n'est pas rationnel, sans quoi la même inégalité exigerait $u_1 = \sigma_m$ à partir d'une certaine valeur de m, alors que $\sigma_m \neq \sigma_{m+1}$. Le nombre u_1 est bien ainsi un nombre transcendant de Liouville.

Je me dispense de rechercher s'il en est de même de u_2, u_3, ...

Ici encore se manifeste une différence entre la théorie ordinaire des polynomes algébriques et celle des séries à coefficients rationnels : quand on envisage des fonctions symétriques des inverses des racines ou de séries $\varphi(z)$ à coefficients rationnels, les fonctions symétriques de *degré infini* à coefficients rationnels peuvent être égales à des nombres transcendants de Liouville.

3° Je ne m'attarde pas à considérer le cas où l'on remplace $P(\alpha_m)$ par une série $P(\alpha_m, \alpha_{m_1}, \ldots, \alpha_{m_i})$ à coefficients rationnels et fonction de $i+1$ racines de $\varphi(z)$. Je ne m'occupe pas non plus du cas où, soit $P(\alpha_m)$, soit $P(\alpha_m, \alpha_{m_1}, \ldots, \alpha_{m_i})$ serait un quotient de deux poly-

nomes ou de deux séries, soit en α_m, soit en $\alpha_m, \alpha_{m_1}, \ldots, \alpha_{m_i}$ à coefficients rationnels. Je vais seulement traiter un exemple suggestif.

Soit

$$P = \alpha_m \alpha_{m_1}^{-1};$$

$\sum \alpha_m \alpha_{m_1}^{-1}$ contiendra les deux termes $\alpha_m \alpha_{m_1}^{-1}$, $\alpha_{m_1} \alpha_m^{-1}$ et, par conséquent, $\sum \alpha_m \alpha_{m_1}^{-1}$ ne peut converger absolument. Mais l'on pourra classer les rapports $\alpha_m \alpha_{m_1}^{-1}$ en deux catégories : ceux dont le module est < 1, ceux dont le module est > 1, en supposant qu'il n'y ait pas deux racines de $\varphi(z)$ de même module (¹). Les premiers ont pour somme de leurs modules

$$S = \sum_1^\infty {}^m r_m (r_{m+1}^{-1} + r_{m+2}^{-1} + \ldots)$$

et l'on voit de suite que, *si les r_m croissent* (²) *assez vite avec m*, cette somme convergera absolument. Donc le produit absolument convergent

$$\varpi = \prod_{m,i} (1 - Z \alpha_{m+i} \alpha_m^{-1}),$$

où $m = 1, 2, \ldots, \infty$ et $i = 1, 2, \ldots, \infty$ est une fonction entière. Les seconds rapports $\alpha_m \alpha_{m_1}^{-1}$ ont leurs modules plus grands que 1, $r_{m_1} < r_m$; la somme de leurs inverses est encore S et le produit

$$\varpi_1 = \prod_{m,i} (1 - Z^{-1} \alpha_{m+i} \alpha_m^{-1})$$

est absolument convergent dès que $|Z| > 0$, quel que soit Z. On voit alors que P est racine de ϖ ou de ϖ_1, en tout cas de la fonction $\varpi\varpi_1$ (³).

Ceci paraît indiquer la voie à suivre pour étendre les considérations précédentes au cas où $P(\alpha_m, \alpha_{m_1}, \ldots, \alpha_{m_i})$ est une fraction rationnelle et non plus un polynome; je ne m'y attarde pas.

(¹) Exemple de pareilles séries $\varphi(z)$: celles où $|c_n| \neq 0$ décroît suffisamment vite quand n croît indéfiniment (*Acta mathem.*, t. XXIX, p. 324-326).

(²) Exemple : cas où $r_{m+1} \geqq 2^m r_m$.

(³) C'est une fonction quasi-entière ayant pour points singuliers essentiels 0 et ∞. Elle admet un développement en série de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} u^n z_n$ (*J. de Math.*, 1902, p. 356 et suiv.; *Bull. Soc. math.*, 1902, p. 143-146, 1903, p. 27 et suiv.).

4° Enfin, peut-être pourrait-on considérer des séries $\varphi(z)$, $P(x_m)$, $P(x_m, x_{m_1}, \ldots)$ dont les coefficients sont des nombres rationnels ou transcendants de Liouville et montrer que les coefficients des développements en série analogues à $\Phi(Z)$ sont alors rationnels ou transcendants de Liouville. Si l'on pouvait de plus faire en sorte que les nombres transcendants de Liouville à envisager dans les déductions successives sont tous correspondants au sens du Chapitre III, on aurait, semble-t-il, dans l'espèce, un résultat tout à fait analogue à celui-ci :

Toute fonction symétrique d'un nombre fini de termes des racines d'une équation algébrique à coefficients rationnels a pour valeur un nombre rationnel.

On remarque que l'on aura fait un premier pas dans cette voie en traitant d'abord le cas, qui semble très abordable, où $\varphi(z)$ est, non pas une série, mais une équation algébrique à coefficients entiers, rationnels ou transcendants de Liouville. Je n'insiste pas davantage.

Ces idées paraissent d'autant plus susceptibles d'être appliquées avec succès aux fonctions symétriques de degré infini qu'elles se trouvent vérifiées, comme on l'a vu, pour les fonctions symétriques de degré fini et que, d'après le Chapitre III, pages 25-40, il existe une infinité d'ensembles formés de nombres de Liouville correspondants et des nombres rationnels et qui jouissent de propriétés tout à fait analogues, au point de vue des quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique et de l'extraction des racines, à celle de l'ensemble des nombres rationnels.

CHAPITRE XII.

SUR L'EXTENSION DE LA NOTION DE DIVISIBILITÉ ET DE RÉDUCTIBILITÉ AUX FONCTIONS ENTIÈRES.

Racines des fonctions entières et extensions du théorème de d'Alembert. — On sait que toute équation algébrique ou tout polynome possède une racine, pourvu que l'équation ne soit pas identique à zéro ou que le polynome ne se réduise pas à une constante. En est-il de même pour les séries?

Je ne puis ici que rappeler sommairement sans démonstration quelques-uns des résultats connus. La fonction e^z n'a pas de racines finies, car $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = 0$ donne

$$e^x = 0, \qquad x = -\infty,$$

y quelconque; mais la fonction $e^z + C = 0$, où $C \neq 0$, a toujours une infinité de racines. M. Picard a établi [1] ce théorème :

Parmi les équations entières *de la forme* $f(z) + C = 0$, *où* $f(z)$ *est une fonction entière donnée, et où* C *est un paramètre prenant toutes les valeurs possibles, il y en a une au plus, correspondant à une valeur particulière du paramètre, qui n'a pas de racines.*

On a même été beaucoup plus loin, car on a pu donner, dans des cas étendus, des limites inférieures et supérieures du nombre des racines comprises, dans le plan complexe des z (où $z = x + yi$), à l'intérieur d'un cercle de rayon R ayant pour centre l'origine quand

---

(1) Pour ceux que la chose intéresserait, je ne puis que renvoyer aux travaux sur la théorie des fonctions entières et quasi-entières, méromorphes ou quasi-méromorphes (quotients de deux fonctions entières ou quasi-entières), etc. *Voir* la bibliographie à la fin du Volume.

R est suffisamment grand. Les fonctions $e^{f_1(z)}$, où $f_1(z)$ est une fonction entière, n'ont encore aucune racine finie. Ce n'est pas tout; on sait que, si un polynome a toutes ses racines réelles, il en est de même de la dérivée. On a pu établir une propriété presque semblable pour certaines catégories de fonctions entières; la fonction ayant toutes ses racines réelles, la dérivée n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires. Ces théorèmes comportent des extensions aux fonctions quasi-entières.

Mais tout cela n'est pas spécial au cas des séries à coefficients rationnels.

Je rappellerai encore ce résultat, qui éclaire les considérations du Chapitre XI, en en fixant mieux la portée et que je demanderai d'admettre ici :

THÉORÈME I_{12}. — *Soit*

$$f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

une fonction entière; si l'on a, ε étant un nombre positif arbitraire fixe, d'ailleurs aussi petit qu'on veut, à partir d'une certaine valeur de n,

$$(1_{12}) \qquad |c_n|^{-1} > n^{n(1+\varepsilon)}$$

ou encore, ce qui revient au même,

$$(2_{12}) \qquad |c_n|^{-1} > (n!)^{1+\varepsilon},$$

$f(z)$ est de la forme

$$f(z) = \prod_1^{\infty} (1 + z z_m^{-1}) \quad (^1),$$

---

(1) C'est un produit infini (*voir* Chap. XI). Ce que je demande d'admettre ici, c'est l'équivalent, pour les séries satisfaisant à (1_{12}) ou (2_{12}), du théorème de d'Alembert pour les polynomes.

Les lecteurs au courant de la théorie des fonctions entières vérifieront sans peine ce résultat; la fonction $f(z)$ est ici d'ordre < 1; elle est de la forme $e^{P(z)}\varphi(z)$, où $\varphi(z)$ est le produit des facteurs $1 + z z_n^{-1}$ correspondant aux racines de $f(z)$; $\varphi(z)$ est d'ordre < 1 et $e^{P(z)}$ doit se réduire à une constante, sans quoi la fonction $f(z)$ serait d'ordr

où $-z_1, -z_2, \ldots, -z_m, \ldots$ *sont les racines de* $f(z)$ *et la série* $\sum_1^\infty r_m^{-1}$, *avec* $r_m = \operatorname{mod} z_m$, *converge.*

On a ici, à partir d'une certaine valeur de m, *si* $r_{m+1} \geqq r_m$, $r_m > m$, *puisque* $\sum r_m^{-1}$ *converge.*

Ce dernier point résulte du lemme de la page 188.

Divisibilité des fonctions entières. — Je m'occupe maintenant de la question de la divisibilité des fonctions entières ([1]) : on dira que la fonction entière $\varphi(z)$ divise la fonction entière $F(z)$ quand $F(z)$ admet tous les zéros de $\varphi(z)$ avec un ordre de multiplicité au moins égal; d'après cette définition, tout facteur exponentiel $e^{P(z)}$, où $P(z)$ est une fonction entière ou un polynome, divise toujours toute fonction entière $F(z)$ et joue le même rôle que les constantes pour les polynomes. Je ne développe pas ici les conséquences de cette définition; il me suffira d'indiquer que cela donne immédiatement la définition du diviseur commun de deux ou plusieurs fonctions entières, du plus grand commun diviseur, d'un multiple commun, du plus petit multiple commun. D'après ce qu'on a vu au Chapitre X, si $F(z)$ et $\varphi(z)$ ont leurs coefficients rationnels, $\varphi(z)$ divisant $F(z)$, le quotient converge, quel que soit z, et est une fonction entière à *coefficients rationnels*. Il resterait à savoir, quand on ne considère que des fonctions entières, à coefficients rationnels, si le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple commun, convenablement choisis (à cause du facteur arbitraire $e^{P(z)}$), ont aussi leurs coefficients rationnels.

Sur la réductibilité des fonctions entières. — Peut-on, dès lors, arriver à la définition de la réductibilité ou de l'irréductibilité d'une fonction entière à coefficients rationnels? Il faudrait d'abord voir si, dans des cas étendus, une pareille fonction est bien réductible, ou

---

([1]) Je passe sur l'extension aux fonctions quasi-entières, soit dans tout le plan, soit dans un domaine.

Plusieurs des questions envisagées ici pourraient donner lieu à des développements plus étendus et plus précis, dont l'idée est presque immédiate si l'on veut utiliser les résultats connus de la théorie des fonctions entières et quasi-entières. Voir *Ann. École Normale*, 1903, p. 263 et suiv., en particulier p. 276 et suiv..

divisible par une autre à coefficients rationnels, quand elle a pour racine un nombre algébrique, c'est-à-dire une quantité racine d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers ([1]). On passerait ensuite au cas où deux pareilles fonctions ont une racine commune.

Il existe certainement des fonctions entières réductibles; il suffit, en effet, pour le voir, de prendre le produit d'une fonction entière à coefficients rationnels par un polynome à coefficients entiers; le produit est une fonction entière à coefficients rationnels.

Pour qu'on puisse se poser la question de l'irréductibilité des fonctions entières à coefficients rationnels, il semble nécessaire que l'on puisse en trouver dont toutes les racines sont transcendantes. Il y en a bien, par exemple,

$$e^x - a = 1 - a + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

où a est rationnel $\neq 0$ et $\neq 1$. On sait que toutes les racines sont transcendantes, car ([2]) e^x n'est rationnel $= a$ pour aucune valeur algébrique ou rationnelle de x. Il y a d'autres exemples ([3]) parmi les fonctions quasi-algébriques (entières ou quasi-entières).

Ceci posé, on pourrait être tenté de donner cette définition : une fonction entière à coefficients rationnels est irréductible lorsque cette fonction entière n'a aucune racine commune avec une fonction entière à coefficients rationnels sans la diviser; on conserverait ainsi une analogie importante avec les polynomes. Mais cette définition est inacceptable, ou aurait besoin d'être énormément précisée : c'est ce que je montrerai dans ce qui suit.

Je vais d'abord établir le théorème très général suivant, qui s'applique à toute fonction entière ([4]) dont les coefficients ont leurs modules fonctions assez rapidement décroissante du rang :

Théorème II_{12}. — *Soit une fonction entière*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

([1]) A ce sujet, *voir* E. Strauss, *Acta Math.*, t. XI, p. 13 et suiv..

([2]) Résultat à admettre ici; *comparer* Chap. IX.

([3]) Voir *Acta Mathem.*, t. XXIX, p. 328-331.

([4]) C'est-à-dire à toute fonction entière d'ordre zéro et d'indice $k \geq 3$, même d'indice infini.

telle qu'à partir d'une certaine valeur de n on ait, b_1 étant un nombre quelconque, entier ou non, > 1 et ε un nombre positif arbitraire, très petit si l'on veut,

$$|c_n^{-1}| \geqq b_1^{b_1^{n^{1+\varepsilon}}}.$$

Il y a une infinité de valeurs de n, telles qu'à l'intérieur d'un cercle de rayon $|c_n|^{-a}$ (a nombre positif quelconque $\geqq 1$ indépendant de n) ayant pour centre l'origine, le nombre N_n des racines de $f(z)$ soit précisément n. Autrement dit, il y a exactement n zéros dont le module est inférieur ou au plus égal à $|c_n|^{-a}$.

Les valeurs de n en question sont celles pour lesquelles l'inégalité (7_{12}), indiquée plus loin, a lieu.

J'appliquerai ce théorème, cas particulier d'un théorème classique (*voir*, par exemple, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 2[e] année); le nombre N_n des racines comprises à l'intérieur du cercle C_n de rayon R_n assez grand ayant pour centre l'origine dans le plan complexe des z est la valeur de l'intégrale

$$N_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \tag{3_{12}}$$

prise le long de la circonférence C_n. Je suppose [1] que R_n ait été choisi de façon que $f(z)$ n'ait pas de zéro le long du cercle C_n.

Je prendrai maintenant $R_n = \gamma_n^{-a}$, en supposant $\gamma_n = |c_n| \neq 0$, $a \geqq 1$ indépendant ou non de n. On a, sur la circonférence,

$$z = R_n e^{i\theta} = c_n^{-a} u,$$

$$f(z) = c_0 + c_1 c_n^{-a} u + \ldots + c_{n-1} c_n^{a(1-n)} u^{n-1} + c_n^{1-an} u^n + c_{n+1} c_n^{-a(n+1)} + \ldots,$$

$$f'(z) = c_1 + \ldots + (n-1) c_{n-1} c_n^{a(2-n)} u^{n-2} + n c_n^{1+a-an} u^{n-1}$$
$$+ (n+1) c_{n+1} c_n^{-an} + \ldots.$$

---

(1) Les zéros de $f(z)$ sont isolés; donc, à l'intérieur d'un contour fermé enveloppant l'origine, leur nombre est limité; une circonférence de rayon R ayant pour centre l'origine ne peut alors constamment passer par un zéro de $f(z)$ quand R varie entre R' et R' + ρ, si petit que soit ρ.

Je pose

$$\begin{aligned} S_n &= \gamma_0 + \gamma_1\gamma_n^{-a} + \ldots + \gamma_{n-1}\gamma_n^{a(1-n)},\\ S'_n &= \gamma_1 + \ldots + (n-1)\gamma_{n-1}\gamma_n^{a(2-n)},\\ T_n &= \gamma_{n+2}\gamma_n^{-a(n+2)} + \ldots,\\ T'_n &= (n+2)\gamma_{n+2}\gamma_n^{-a(n+1)} + \ldots. \end{aligned}$$

S_n est la somme des modules des n premiers termes de $f(z)$;
T_n la somme des modules des termes qui suivent le $(n+2)^{\text{ième}}$ terme;
S'_n, T'_n sont les sommes correspondantes pour $f'(z)$.

Je vais chercher des limites supérieures de S_n, S'_n, T_n, T'_n, en supposant n suffisamment grand.

Je prends d'abord S_n et S'_n. Quand $i \geqq 1$,

$$n\gamma_n^{1+a-an} : (n-i)\gamma_{n-i}\gamma_n^{a(1+i-n)} > \gamma_n^{1-an} : \gamma_{n-i}\gamma_n^{a(i-n)} = \gamma_n^{1-ia}\gamma_{n-i}^{-1},$$

en supposant

$$\gamma_{n-i} \neq 0.$$

Or, si $i = 1$,

$$\gamma_n^{1-ai}\gamma_{n-i}^{-1} = \gamma_n^{1-a}\gamma_{n-1}^{-1} > \gamma_{n-1}^{-1},$$

car

$$a \geqq 1;$$

si $i > 1$,

$$\gamma_n^{1-ia}\gamma_{n-i}^{-1} = \gamma_n^{-1}\gamma_n^{2-ia}\gamma_{n-i}^{-1} \geqq \mu\gamma_n^{-1} \qquad (\mu \text{ limite inférieure de } \gamma_m^{-1} \text{ pour } \gamma_m \neq 0);$$

il en résulte

$$S_n < \gamma_n^{1-an} n \delta_n^{-1}, \qquad S'_n < \gamma_n^{1+a-an} n^2 \delta_n^{-1},$$

où

$$(3_{12}\ bis) \quad \delta_n = \gamma_{n-1}^{-1} \text{ si } \gamma_{n-1} \neq 0 \quad \text{et} \quad \delta_n = \gamma_n^{-1} \text{ si } \gamma_{n-1} = 0.$$

Je passe maintenant à T_n et T'_n. On aura, pour $i \geqq 2$, quand $\gamma_{n+i} \neq 0$,

$$\gamma_n^{1-an} : \gamma_{n+i}\gamma_n^{-a(n+i)} > n\gamma_n^{1+a-an} : (n+i)\gamma_{n+i}\gamma_n^{1-a(n+i)} = \frac{n}{n+i}\gamma_n^{1+ai}\gamma_{n+i}^{-1}.$$

Il en résulte

$$T_n < \lambda_n^{-1}\gamma_n^{1-an}, \qquad T'_n < \lambda_n^{-1} n \gamma_n^{1+a-an},$$

λ_n étant arbitraire aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand,

à condition de supposer

$$(4_{12})\qquad \frac{n}{n+i}\gamma_n^{1+ai}\gamma_{n+i}^{-1} > (1+\lambda_n)^{i-1};$$

on a finalement

$$(5_{12})\qquad \begin{cases} f(c_n^{-a}u) = c_n^{1-an}u^n(1+c_{n+1}c_n^{-1-a}u)+\mathrm{U}_n, \\ f'(c_n^{-a}u) = nc_n^{1+a-an}u^{n-1}\left(1+c_{n+1}c_n^{-1-a}\dfrac{n+1}{n}u\right)+\mathrm{U}'_n, \end{cases}$$

avec

$$|\mathrm{U}_n| \leqq \mathrm{S}_n+\mathrm{T}_n < \gamma_n^{1-an}\quad(n\delta_n^{-1}+\lambda_n^{-1}),$$
$$|\mathrm{U}'_n| \leqq \mathrm{S}'_n+\mathrm{T}'_n < n\gamma_n^{1+a-an}(n\delta_n^{-1}+\lambda_n^{-1}).$$

Si l'on suppose que quelques-uns des coefficients c_{n+1}, c_{n+2}, ..., qui suivent c_n, peuvent être nuls, soit $c_{n+\tau}$ le premier d'entre eux qui soit $\neq 0$; en modifiant fort peu le raisonnement ci-dessus, on voit que, la condition (4_{12}) étant remplie, les formules (5_{12}) deviennent

$$(6_{12})\qquad \begin{cases} f(c_n^{-a}u) = c_n^{1-an}u^n(1+c_{n+\tau}c_n^{-1-a\tau}u^\tau)+\mathrm{U}''_n, \\ f'(c_n^{-a}u) = nc_n^{1+a-an}u^{n-1}\left(1+c_{n+\tau}c_n^{-1-a\tau}\dfrac{n+\tau}{n}u^\tau\right)+\mathrm{U}'''_n, \end{cases}$$

avec

$$|\mathrm{U}''_n| \leqq \gamma_n^{1-an}(n\delta_n^{-1}+\lambda_n^{-1}),\qquad |\mathrm{U}'''_n| \leqq n\gamma_n^{1+a-an}(n\delta_n^{-1}+\lambda_n^{-1}).$$

Les formules (6_{12}) comprennent d'ailleurs les formules (5_{12}).

Ceci posé, je m'occupe de la condition (4_{12}) et je me propose d'examiner le cas où la condition

$$(7_{12})\qquad \frac{n}{n+i}\gamma_n^{1+ai}\gamma_{n+i}^{-1} > (1+\lambda_n)^i = n^{2i}$$

a lieu dès que $i \geqq 1$ pour les valeurs de $\gamma_{n+i} \neq 0$. Cette condition entraîne la condition (4_{12}) dont je n'ai plus besoin de tenir compte : quand elle a lieu pour une certaine valeur de n assez grande, on en conclut (6_{12}); si elle a lieu pour une infinité de valeurs de n, (6_{12}) a lieu pour ces valeurs.

J'admets pour un instant que (7_{12}) n'ait lieu, quel que soit $i \geqq 1$, que pour un nombre limité de valeurs de n; à partir d'une certaine

valeur ν de n, il y a, pour chaque valeur de n, une valeur de i au moins telle que

$$\frac{n}{n+i}\gamma_n^{ai+1}\gamma_{n+i}^{-1} \leqq n^{2i},$$

ou

$$\gamma_{n+i} \geqq \frac{n}{n+i} n^{-2i}\gamma_n^{ai+1} \geqq n^{-4i}\gamma_n^{ai+1} \text{ (1)}.$$

Or

$$\lim \gamma_n 2^n = 0$$

pour $n = \infty$,

$$\gamma_n < n^{-2}, \qquad \gamma_n^i < n^{-2i}, \qquad \gamma_{n+i} > \gamma_n^{ai+2i+1} \geqq \gamma_n^{(a+3)i}.$$

Dès lors, considérant maintenant a comme une quantité fixe $\geqq 1$ indépendante de n, pour une valeur i_1 de i au moins,

$$(8_{12}) \qquad \gamma_{\nu+i_1} \geqq \gamma_\nu^{(a+3)i_1};$$

pour une valeur de $i_2 \geqq 1$,

$$(9_{12}) \qquad \gamma_{\nu+i_1+i_2} \geqq \gamma_{\nu+i_1}^{(a+3)i_2} \geqq \gamma_\nu^{(a+3)^2 i_1 i_2},$$

. . . .

ν étant assez grand. On en conclut

$$\gamma_{\nu+i_1+i_2+\ldots+i_\sigma} \geqq \gamma_\nu^{(a+3)^\sigma i_1 i_2 \ldots i_\sigma},$$

ce qui exige *a fortiori*, puisque $\gamma_\nu = \beta^{-1} < 1$,

$$\gamma_{\nu+m} \geqq \beta^{-(\nu+m)(a+3)^m} \geqq \beta^{-[(\nu+m)(a+3)]^{m+\nu}}$$

pour une infinité de valeurs de m. Il y a ainsi une infinité de valeurs de m_1 qui satisfont à la condition

$$(10_{12}) \qquad \gamma_{m_1} \geqq \beta^{-[(a+3)m_1]^{m_1}}.$$

On remarquera que cette dernière condition n'est pas remplie si

---

(1) Pour $i \geqq 1$, $n^{2i} > \frac{n+i}{n}$, car $n^2 > n+i$; de plus, $\lim \gamma_n 2^n = 0$, puisque $f(2)$ converge.

l'on a à partir d'une certaine valeur de n

$$(11_{12})\qquad \gamma_n^{-1} \geqq b_1^{b_1^{n^{1+\varepsilon}}}, \qquad b_1 \text{ entier ou non} > 1,$$

ε étant un nombre positif fixe arbitraire, d'ailleurs très petit si l'on veut (¹). En effet, pour que (10_{12}) eût alors lieu, il faudrait, pour une infinité de valeurs de n (les logarithmes étant de base b_1)

$$b_1^{n^{1+\varepsilon}} < [n(a+3)]^n \log \beta,$$
$$n^{1+\varepsilon} < \log\log\beta + n[\log n + \log(a+3)],$$

ce qui est impossible dès que n est assez grand; $\frac{\log n + \log(a+3)}{n}$ a, en effet, pour limite zéro quand n croît indéfiniment.

Je suppose donc que (11_{12}) ait lieu, par suite aussi, pour une infinité de valeurs de n, (7_{12}). Dans $f'(c_n^{-a}u)$,

$$U_n''' : n\gamma_n^{1+a-an} \leqq n\delta_n^{-1} + \lambda_n^{-1},$$

et

$$\frac{n+\tau}{n}\gamma_{n+\tau}\gamma_n^{-1-a\tau}, \qquad \text{où} \qquad \tau \geqq 1,$$

sont tous deux de la forme $\lambda_1 n^{-2}$, où $|\lambda_1|$ est fini, quel que soit n, d'après $(3_{12}\ bis)$, (7_{12}) et (11_{12}), pour une infinité de valeurs de n. Donc, pour ces valeurs,

$$(12_{12})\qquad \begin{cases} f(c_n^{-a}u) = c_n^{1-an}u^n(1+\varepsilon_n), \\ f'(c_n^{-a}u) = nc_n^{1+a-an}u^{n-1}(1+\varepsilon_n'), \end{cases}$$

où $|\varepsilon_n|$, $|\varepsilon_n'|$ sont au plus de même ordre de grandeur que n^{-2}.

Il est maintenant commode d'appliquer la formule (3_{12}). En effet, sur le cercle C_n,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = nc_n^a u^{-1}(1+\varepsilon_n')(1+\varepsilon_n)^{-1} = nc_n^a u^{-1}(1+\eta_n),$$
$$dz = R_n i e^{i\theta}\,d\theta = c_n{}^a iu\,d\theta,$$
$$N_n = \frac{n}{2\pi}\int_{C_n}(1+\eta_n)\,d\theta = n(1+\eta_n'),$$

(¹) Les lecteurs au courant de la théorie des fonctions entières d'ordre zéro voient de suite que les fonctions entières satisfaisant à (11_{12}) sont toutes celles d'indice $\geqq 3$. On pourrait peut-être améliorer la condition (10_{12}) en cherchant une limite supérieure plus avantageuse de $i_1 i_2 \ldots i_\sigma$; on a, en effet, par exemple, $i_1 i_2 \ldots i_\sigma \leqq e^{\frac{m}{e}}$ (*Journ. de Math.*, 1895, p. 25-26).

où $|\tau'_{1n}|$ est au plus égal à la plus grande valeur de $|\tau_{1n}|$ sur la circonférence C_n, et, par suite, est de l'ordre de n^{-2}. Mais N_n est entier, plus grand que $n-1$, plus petit que $n+1$; donc $N_n = n$. C. Q. F. D.

Voici une conséquence de la méthode précédente : je considère une fonction entière $f(z)$ jouissant de cette propriété : elle a, pour n et n_1 assez grands, une infinité de coefficients c_n dont le module est de la forme $e_k(n)^{-n(\rho+\varepsilon_n)^{-1}}$, où $\lim \varepsilon_n = 0$ pour $n=\infty$, tout autre coefficient c_{n_1} ayant son module égal à $e_k(n_1)^{-n_1\sigma_1^{-1}}$, avec $\rho - \sigma_1$ fini >0. Cette fonction, où $k \geqq 1$, est ce que j'ai appelé ailleurs *une fonction entière d'ordre* $(0, k, \rho)$. Je suppose de plus ici $k \geqq 2$, j'appellerai les coefficients c_n *coefficients principaux*.

Ces derniers satisfont à (7_{12}), car il suffit pour cela

$$\frac{n}{n+i} e_k(n)^{-n(\rho+\varepsilon_n)^{-1}(1+ai)} e_k(n+i)^{n\sigma^{-1}} = M_n n^{2i} > n^{2i} \qquad (i \geqq 1),$$

où $\sigma \leqq \rho + \varepsilon_1$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon$, quand n est assez grand, quel que soit i et le nombre ε positif choisi *a priori;* il suffit donc

$$\log M_n > \frac{n}{\rho+\varepsilon} e_{k-1}(n+i) - \frac{n}{\rho-\varepsilon}(1+ai) e_{k-1}(n) + \log\frac{n}{n+i} - 2i \log n > 0.$$

Quand $k=2$, le second membre P_n est

$$P_n = ne^n\left(\frac{e^i}{\rho+\varepsilon} - \frac{1-ai}{\rho-\varepsilon}\right) + \log\frac{n}{n+i} - 2i\log n:$$

si $a-1$ est nul ou très petit, $P_n > 0$, car ceci a lieu pour $i=1$, et $\frac{dP_n}{di} = ne^n\left(\frac{e^i}{\rho+\varepsilon} - \frac{a}{\rho-\varepsilon}\right) - \frac{1}{n+i} - 2\log n > 0$, quand n est assez grand, et $i \geqq 1$.

Quand $k \geqq 3$, ces conclusions subsisteront quel que soit a. On le voit d'abord pour $i=1$, puis l'on vérifie encore que

$$\frac{dP_n}{di} = \frac{n}{\rho+\varepsilon} e_{k-1}(n+i) e_{k-2}(n+i)\ldots e_1(n+i) - \frac{n}{\rho-\varepsilon} a e_{k-1}(n) - \frac{1}{n+i} - 2\log n > 0.$$

Par conséquent :

Corollaire I_{12}. — *Le théorème précédent s'applique aux fonc-*

tions entières d'indice 2 pour $a - 1$ égal à 0 ou très petit > 0, et aux fonctions entières d'indice $k \geqq 3$, quel que soit le nombre fixe $a \geqq 1$, quand on prend pour les c_n les coefficients principaux. Elles ont exactement n zéros dont le module est inférieur à $e_k(n)^{n(\rho+\varepsilon_n)^{-1}}$.

Ce corollaire s'étend aux fonctions entières obtenues en remplaçant ci-dessus e par b, e_k par $b_k (b > 1)$, c'est-à-dire à toute fonction entière jouissant de cette propriété : elle a, pour n et n_1, assez grands, une infinité de coefficients dont le module est de la forme $b_k(n)^{-n(\rho+\varepsilon_n)^{-1}}$, tout autre coefficient c_n ayant son module égal à $b_k(n_1)^{-n_1 \sigma_1^{-1}}$; les coefficients c_n sont encore dits *coefficients principaux*. Les raisonnements et les calculs sont identiques; quand $k = 2$, il faut toutefois supposer $b > 2$.

Corollaire II_{12}. — *Un corollaire analogue au corollaire I_{12} s'applique aux fonctions entières déduites de celles d'indice $k \geqq 2$ quand on y remplace e par un nombre b, qui doit être > 2 lorsque $k = 2$, et > 1 lorsque $k > 3$: c_n étant un coefficient principal, égal à*

$$b_k(n)^{n(\rho+\varepsilon_n)^{-1}},$$

une pareille fonction a exactement n zéros dont le module est inférieur à $|c_n|^{-a}$.

Je m'occupe maintenant de fonctions entières plus particulières à certains égards : on a vu au Chapitre IV [théorème II_4, formule (10_4) à (12_4) et théorème III_4], qu'il y a une variété indéfinie de fonctions entières dont un nombre transcendant est racine. Ainsi, d'après le théorème III_4, si φ_j est un entier réel fonction de j, tel que $\sum_1^\infty z^j \varphi_j^{-1}$ soit une fonction entière, tout nombre ζ_1 est racine d'une équation

$$(13_{12}) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = -1 + \sum_1^\infty d_m \varphi_m^{-1} z^m, \\ \text{avec } d_m \text{ entier}, \\ |d_m| \leqq \sqrt{2}\, \varphi_m \varphi_{m-1}^{-1} |\zeta_1^{-1}| + \sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Je suppose de plus

$$(13_{12}\ bis) \qquad \varphi_m = b_k(m)^{\rho m}.$$

b entier > 1, $k \geqq 3$, ζ_1 donné. Je dis que, si c_n est $\neq 0$, le théorème II_{12} est applicable à c_n quand $c_{n+1} = 0$, et soit à c_n, soit à c_{n+1}, quand $c_{n+1} \neq 0$.

En effet, d'après (13_{12}), si $c_n \neq 0$,

$$(14_{12}) \qquad \varphi_n^{1} \leqq \gamma_n = |c_n| < \lambda_1 \varphi_{n-1}^{1},$$

où λ_1 est fini; j'examine si (7_{12}) a lieu.

Soit d'abord $i \geqq 2$: il suffit

$$\frac{n}{n+i} \gamma_n^{1+ai} \gamma_{n+i}^{-1} > n^{2i},$$

ou, *a fortiori*,

$$\frac{n}{n+i} \varphi_n^{1-ai} \varphi_{n+i-1} \lambda_1^{-1} > n^{2i},$$

ou, enfin,

$$b_k(n+i-1)^{\rho(n+i-1)} > \lambda_1 n^{2i-1}(n+i)\, b_k(n)^{(1+ai)\rho n}.$$

On vérifiera encore que ceci a lieu pour n assez grand en prenant les logarithmes (base b), parce que $i \geqq 2$, $k \geqq 3$.

L'inégalité (7_{12}) est alors satisfaite si $c_{n+1} = 0$; si $c_{n+1} \neq 0$, je dis que l'inégalité (7_{12}) est vérifiée soit pour l'indice n, soit pour l'indice $n+1$: il suffit de s'en assurer pour $i = 1$ et $c_{n+2} \neq 0$, d'après ce qu'on vient de voir.

J'admets qu'il n'en soit pas ainsi : on aura à la fois

$$\frac{n}{n+1} \gamma_n^{1+a} \gamma_{n+1}^{-1} \leqq n^2, \qquad \frac{n+1}{n+2} \gamma_{n+1}^{1+a} \gamma_{n+2}^{-1} \leqq (n+1)^2$$

ou

$$\gamma_{n+1} \geqq \frac{\gamma_n^{1+a}}{n(n+1)} \geqq n^{-3} \gamma_n^{1+a}, \qquad \gamma_{n+2} \geqq \frac{\gamma_{n+1}^{1+a}}{(n+1)(n+2)} > n^{-3} \gamma_{n+1}^{1+a}.$$

d'où

$$\gamma_{n+2} > \gamma_n^{(1+a)^2} n^{-6-3a}.$$

D'après (14_{12}), il faut *a fortiori*,

$$\lambda_1 \varphi_{n+1}^{-1} > \varphi_n^{-(1+a)^2} n^{-6-3a},$$

ou

$$b_k(n+1)^{\rho(n+1)} < \lambda_1 n^{6+3a} b_k(n)^{(1+a)^2 \rho n}.$$

L'impossibilité de cette inégalité se vérifie encore pour n assez grand en prenant les logarithmes (base b). Donc :

Corollaire III_{12}. — *Soit ζ_1 un nombre quelconque donné $\neq 0$; ζ_1, réel ou imaginaire, est racine d'une des séries (13_{12}).*

Soit c_n un coefficient de cette série différent de zéro : 1° quand $c_{n+1} = 0$, il y a, si n est assez grand, exactement n racines de la série à l'intérieur d'un cercle C_n de rayon $|c_n|^{-a}$ ayant pour centre l'origine (a arbitraire > 1 et indépendant de n); 2° quand $c_{n+1} \neq 0$, si ceci n'est plus vrai, il y a exactement $n+1$ racines de la série à l'intérieur d'un cercle analogue de rayon $|c_{n+1}|^{-a}$.

Quand on donne à k dans (13_{12} *bis*) une suite de valeurs $\geqq 3$, on obtient une suite de séries S_k dont ζ_1 est racine. Soient S_k, $S_{k'}$ deux de ces séries avec $k' > k$, c'_n le coefficient de z^n dans $S_{k'}$; soit de plus $c_n \neq 0$, et choisi de façon que S_k ait exactement n racines dans C_n.

Pour $S_{k'}$, je distingue deux cas :

1° Un des coefficients c'_m, avec n' entier,

$$n' = (\log n)(1+\varepsilon), \qquad n'+2 \leqq m \leqq n-2 \qquad (\text{base } b),$$

ε fixe arbitraire > 0, est $\neq 0$; dans un cercle de rayon $\gamma_{m_1}'^{-a}$ (a fixe $\geqq 1$), où $\gamma'_{m_1} = |c'_{m_1}|$, S_k a exactement m_1 racines, avec $n'+1 \leqq m_1 \leqq n-1$; or, l'on peut prendre $\gamma_{m_1}'^{-a} > \gamma_n^{-a}$; il suffit, en effet, $\gamma'_{m_1} < \gamma_n$; ou, d'après (14_{12}), en posant

$$\varphi'_{m_1} = b_{k'}(m_1)^{\rho' m_1},$$
$$\lambda_1 \varphi'^{-1}_{m_1-1} < \varphi_n^{-1},$$

ou, *a fortiori*,

$$\lambda_1 \varphi_n < \varphi_{n'} \leqq \varphi'_{m_1-1},$$
$$\lambda_1 b_k(n)^{\rho n} < b_{k'}(n')^{\rho' n'}.$$

Il suffit

$$\log \lambda_1 + 2 n\, b_{k-1}(n) < \rho' n' b_{k'-1}(n').$$

ou

$$\lambda_2 n\, b_{k-1}(n) < b_{k'-1}(n'), \qquad \lambda_2 \text{ fini.}$$
$$\log(\lambda_2 n) + b_{k-2}(n) < 2 b_{k-2}(n) < b_{k'-2}(n'),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$2n < b^{n'} = b^{(1+\varepsilon)\log n} = n^{1+\varepsilon},$$

ce qui a bien lieu (les logarithmes sont pris dans le système de base b).

2° Les coefficients c'_m, avec

$$n' + 2 \leqq m \leqq n - 2,$$

sont tous nuls. Soit c'_{ν_1} le coefficient $\neq$ o d'indice maximum inférieur à $n' + 2$, c'_{ν_2} le coefficient $\neq$ o d'indice minimum supérieur à $n - 2$. La condition (7_{12}) devient pour c'_{ν_1},

$$\frac{\nu_1}{\nu_1 + i}\, \gamma'^{1+ai}_{\nu_1} \gamma'^{-1}_{\nu_1+i} > \nu_1^{2i},$$

où $\nu_1 + i \geqq \nu_2 \geqq n - 1$. Je prendrai, a étant choisi en conséquence,

$$\gamma'^{a}_{\nu_1} = \varphi'^{-\alpha}_{m},$$

α fixe $\geqq 1$, m comme tout à l'heure; (7_{12}) est possible si

$$\varphi'^{-\alpha i}_{m} \gamma'_{\nu_1} > \nu_1^{2i-1}(\nu_1 + i)\gamma'_{\nu_1+i},$$

ou, *a fortiori*, d'après (14_{12}), si

$$\varphi'^{-\alpha i}_{m} \varphi'^{-1}_{\nu_1} > \nu_1^{2i-1}(\nu_1 + i)\lambda_1 \varphi'^{-1}_{\nu_1+i-1},$$

ou

$$\lambda_1^{-1} \varphi'_{\nu_1+i-1} > \nu_1^{2i-1}(\nu_1 + i)\varphi'^{\alpha i}_{m} \varphi'_{\nu_1},$$

ou encore

$$\begin{aligned} Q_i = &-\log\lambda_1 + \log\varphi'_{\nu_1+i-1} - (2i-1)\log\nu_1 \\ &- \log(\nu_1 + i) - \alpha i \log\varphi'_m - \log\varphi'_{\nu_1} > 0. \end{aligned}$$

On voit de suite que $\frac{dQ_i}{di}$ croît avec i et est positif pour n assez grand, si l'on suppose $m < n - 2$, puisque $\nu_1 + i - 1 \geqq n - 2$. Il suffit donc de vérifier que $Q_i > 0$ pour $\nu_1 + i - 1 = n - 2$: ceci résulte encore, d'après des procédés maintes fois employés précédemment, du fait que $k \geqq 3$.

En raisonnant alors comme dans la démonstration du théorème II_{12}, à propos de (12_{12}), on voit que $S_{k'}$ a dans le cercle C'_m de rayon φ'^{α}_{m}

(ayant pour centre l'origine), où $m \leqq n - 3$, ν_1 racines exactement [1], avec $\nu_1 < n' + 2$. Ici encore, d'après (14_{12}),

$$\varphi'^{\alpha}_m > \varphi^{\alpha}_n \geqq |c_n|^{-\alpha}.$$

En résumé :

Théorème III_{12}. — *Soient* S_k, $S_{k'}$, *avec* $k' > k$, *deux des séries* (13_{12}), *dont* ζ_1 *est racine : il existe une infinité de circonférences* C_n (*n assez grand*) *ayant pour centre l'origine, où* S_k *a exactement n racines, tandis que* $S_{k'}$ *en a au plus n* — 1.

Ce résultat comporte une conséquence importante au point de vue de la définition de l'irréductibilité des fonctions entières à coefficients rationnels dont j'ai parlé plus haut; avec cette définition, on voit que, à toute série S_k ayant pour racine un nombre arbitraire ζ_1, correspond une série S_k ayant pour racine ce nombre et n'ayant pas toutes les racines de S_k; autrement dit :

Corollaire. — *Avec la définition en question de l'irréductibilité des fonctions entières à coefficients rationnels, aucune des séries* S_k *n'est irréductible.*

La conséquence vraisemblable de ce corollaire, c'est qu'il faudrait ajouter des conditions supplémentaires à la définition. Je n'insiste pas, en me contentant d'indiquer que, probablement, le théorème III_4 conduirait à considérer l'irréductibilité relative d'une série par rapport à un ensemble particulier de séries dont elle fait partie [2].

---

[1] On aperçoit là nettement l'influence des lacunes de la série sur la répartition des racines. L'étude plus précise de cette influence pour les fonctions entières d'ordre zéro auxquelles s'applique le théorème II_{12} et ses corollaires peut faire un intéressant sujet de recherches. Comparer *Acta Math.*, t. XXIX, p. 324 et *Journ. Éc. Pol.*, 1903, p. 91 et suiv.

[2] Dans le cas considéré au théorème II_{12}, on pourra, au lieu de l'intégrale (3_{12}), considérer l'intégrale

$$\sum_{n,\delta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} z^{\delta}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

qui donne la somme des puissances $\delta^{\text{ièmes}}$ des racines contenues dans C_n. Ainsi, quand les $|c_n|$ décroissent suffisamment vite avec n, et constamment, on trouve, si $c_n \neq 0$, $c_{n-1} \neq 0$,

$$\sum_{n,1} = -c_{n-1}c_n^{-1}(1+\varepsilon_n),$$

$\lim \varepsilon_n = 0$, pour $n = \infty$.

NOTE I.

SUR LA CLASSIFICATION DES FONCTIONS ENTIÈRES.

I.

Je crois utile d'annexer ici pour la clarté quelques indications sur la classification des fonctions entières, de façon que le lecteur qui ne la connaît pas suffisamment ait sur la question des idées assez précises.

Soit

$$(1) \qquad \varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} a_m x^m$$

une série dont le rayon de convergence est infini, c'est-à-dire qui converge quel que soit x : par définition, c'est une fonction entière.

Si cette fonction possède une infinité de coefficients a_{n_1} tels que, si petit que soit le nombre fixe ε, dès que n_1 est assez grand,

$$(2) \qquad (\log_k n_1)^{(\rho-\varepsilon)n_1} < |a_{n_1}|^{-1} \leqq (\log_k n_1)^{(\rho+\varepsilon)n_1},$$

les autres coefficients étant tels, dès que n est assez grand, que

$$(3) \qquad |a_n|^{-1} \geqq (\log_k n)^{(\rho+\varepsilon)n},$$

on dit que cette fonction est d'ordre (k, ρ^{-1}) [1], k étant ici $\geqq 0$; ainsi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

où l'on a, d'après une formule connue que je n'établis pas (formule de Stirling),

$$1.2\ldots n = n^{n(1-\varepsilon_n)}, \qquad \lim \varepsilon_n = 0 \text{ pour } n = \infty,$$

est d'ordre $(0, 1)$.

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, 1903, p. 1-2; *C. R.*, 9 fév. 1903, p. 348.

Si les formules (2) et (3) restent vraies avec k négatif, on peut adopter une classification analogue; j'ai désigné l'ordre dans ce cas par $(0, -k, \rho^{-1})$, symbole que l'on peut évidemment remplacer [comparer note (1), p. 96-97] par (k, ρ^{-1}), comme lorsque k est positif.

Mais la classification que j'ai indiquée pour les fractions continues arithmétiques (Chap. I, n° 10) suggère l'idée d'une classification un peu différente des fonctions entières, que j'appellerai *la seconde classification* (1). On peut appeler *fonctions d'ordre* (k, ρ^{-1}) celles pour lesquelles les formules (2) et (3) sont remplacées par les suivantes : en posant $k = -h$:

$$(4) \qquad e_h(n_1^{\rho-\varepsilon})^{n_1} < |a_{n_1}|^{-1} \leqq e_h(n_1^{\rho+\varepsilon})^{n_1},$$

$$(5) \qquad |a_n|^{-1} \geqq e_h(n^{\rho+\varepsilon})^n.$$

Cette classification jouit de propriétés analogues à celles de la première, basée sur les formules (2) et (3); pour le montrer suffisamment, je vais établir, dans le cas où $h = 1$, deux résultats fondamentaux.

Soit la série

$$(6) \qquad f(x) = \sum b_n x^n,$$

où $b_n^{-1} = e_1(n^\sigma)^n = e^{n^{\sigma+1}}$ (σ positif).

Je cherche, pour une valeur donnée de x réel > 0, la valeur maxima de l'expression

$$T = x^n e^{-n^{\sigma+1}},$$

n étant regardé comme une variable. On a

$$\log T = n \log x - n^{\sigma+1}$$

et

$$(7) \qquad T'_n T^{-1} = \log x - (\sigma + 1) n^\sigma,$$

en prenant les dérivées par rapport à n. Cette expression, fonction décroissante de $n > 0$, s'annule pour une valeur n_2 de n, qui rend maximum $\log T$; alors

$$(8) \qquad \log T = (\sigma + 1) n_2^{\sigma+1} - n_2^{\sigma+1} = \sigma n_2^{\sigma+1}.$$

---

(1) De même, pour les irrationnelles, la première classification correspond aux deux dernières inégalités (15) et (16) du Chapitre I (k positif ou négatif), la seconde aux deux premières; la troisième est celle résultant de (15) et (16).

Je prends maintenant dans (6), x étant donné > 0, le rapport V d'un terme au suivant; on a

$$V = \frac{b_m x^m}{b_{m+1} x^{m+1}} = e^{(m+1)^{\sigma+1}} e^{-m^{\sigma+1}} x^{-1}.$$

Je donne à x la valeur résultant de $T'_n = 0$:

$$(9) \qquad \log V = (m+1)^{\sigma+1} - m^{\sigma+1} - (\sigma+1) n_2^{\sigma}.$$

On a, d'après la formule du binome,

$$m^{\sigma+1}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\sigma+1} - 1\right] \geqq \frac{m^{\sigma}}{2}(\sigma+1),$$

dès que m est assez grand,

$$\log V \geqq (\sigma+1)\left(\frac{m^{\sigma}}{2} - n_2^{\sigma}\right) \geqq \log 3,$$

lorsque $m \geqq \lambda n_2$ avec λ fini.

La somme S des termes de $f(x)$ peut se décomposer en deux : l'une $\sum_1$ formée des termes jusqu'à un indice $\leqq \lambda n_2$, dont chacun est au plus égal à $e^{\sigma n_2^{\sigma+1}}$; on a

$$\sum\nolimits_1 \leqq \lambda n_2 T \leqq \lambda n_2 e^{\sigma n_2^{\sigma+1}};$$

l'autre $\sum_2$ formée des termes suivants pour lesquels $V \geqq 3$; leur somme

$$\sum\nolimits_2 \leqq T\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right) = \frac{3}{2}T = \frac{3}{2}e^{\sigma n_2^{\sigma+1}}.$$

On a donc, ε' étant analogue à ε,

$$(10) \qquad S \leqq e^{\sigma n_2^{\sigma+1}}\left(\lambda n_2 + \frac{3}{2}\right) \leqq e^{\sigma n_2^{\sigma+1}(1+\varepsilon')}.$$

On peut introduire x dans cette relation, on a

$$n_2 = \left(\frac{\log x}{\sigma+1}\right)^{\sigma^{-1}},$$

$$(11) \qquad S \leqq e^{a(\log x)^{1+\sigma^{-1}}} \leqq e^{(\log x)^{1+\sigma^{-1}}} = x^{(\log x)^{\sigma^{-1}}},$$

car $a = \sigma(1+\varepsilon')\left(\frac{1}{\sigma+1}\right)^{1+\sigma^{-1}} < 1$. Donc :

La série $f(x)=\sum e^{-n^{\sigma+1}}x^n$ *a son module au plus égal à* $r^{(\log r)^{\frac{1}{\sigma}}}$ *dès que* $|x|=r$ *est assez grand.*

Ceci s'étend de suite à la série

$$\varphi(x)=\sum_{1}^{\infty} a_n x^n,$$

dont les coefficients sont assujettis, dès que n est assez grand, à la condition

(12) $$|a_n|^{-1} > e^{n^{\rho-\varepsilon_1+1}}, \qquad \varepsilon_1 \text{ analogue à } \varepsilon$$

(déduite de (4) et (5) pour $h=1$). Je prends, en effet,

$$\rho=\sigma+\varepsilon_1.$$

A partir d'une certaine valeur de n, d'après (12), chaque terme de $\varphi(x)$ a son module plus petit que celui du terme correspondant de $f(x)$. Dès que $r=|x|$ est assez grand,

$$|\varphi(x)|<|P(x)|+|f(x)|,$$

où $P(x)$ est un polynome, de module évidemment plus petit que $\varepsilon'_1 r^{(\log r)^{\frac{1}{\sigma}}}$; donc

$$|\varphi(x)|<(1+\varepsilon'_1)\, r^{(\log r)^{\frac{1}{\sigma}}}< r^{(\log r)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_2}},$$

ε'_1, ε_2 analogues à ε_1. On en conclut :

Théorème I. — *La série*

$$\varphi(x)=\sum_{1}^{\infty} a_n x^n,$$

où l'on a, à partir d'une certaine valeur de n,

(12) $$|a_n|^{-1} > e^{n^{\rho+1-\varepsilon}}$$

(ε *fixe positif aussi petit qu'on veut*), *a son module au plus égal à*

$$r^{(\log r)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon_2}}$$

(ε_2 *analogue à* ε) *dès que* $|x|=r$ *est assez grand.*

On peut établir une réciproque, qui se formulera ainsi :

THÉORÈME II. — *Tout étant posé comme au théorème* I, *s'il y a, dans la série* $\varphi(x)$, *une infinité de valeurs* n_1 *de* n *telles que*

$$|a_{n_1}|^{-1} \leq e^{n_1^{\rho+1+\varepsilon}},$$

il y a une infinité de valeurs de x *telles que, pour* $|x| = r$,

$$|\varphi(x)| \geq r^{(\log r)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_1}}.$$

En effet, soit M_r la plus grande valeur de $|\varphi(x)|$ pour $|x| = r$. Je suppose que l'on ait toujours, à partir d'une certaine valeur de r,

(13) $$|\varphi(x)| < r^{(\log r)^{\frac{1}{\rho}-\tau}},$$

où τ est fixe et positif, $\frac{1}{\rho} - \tau = \theta > 0$. On sait que (¹)

$$|a_{n_1}| \leq r^{-n_1} M_r < r^{(\log r)^{\theta} - n_1},$$

d'où

$$e^{-n_1^{\rho+1+\varepsilon}} \leq r^{(\log r)^{\theta} - n_1},$$

$$0 \leq (\log r)^{\theta+1} - n_1 \log r + n_1^{\rho+1+\varepsilon} = X_r.$$

Soit

$$r\frac{dX_r}{dr} = (\theta+1)(\log r)^{\theta} - n_1 = 0.$$

Cette équation détermine une valeur de r pour laquelle X_r est minimum, et doit être ≥ 0 ; mais alors

$$\log r = \left(\frac{n_1}{\theta - 1}\right)^{\theta^{-1}},$$

$$X_r = \left(\frac{n_1}{\theta+1}\right)^{1+\theta^{-1}} - n_1\left(\frac{n_1}{\theta+1}\right)^{\theta^{-1}} + n_1^{\rho+1+\varepsilon} \geq 0,$$

$$X_r = -\mu n_1^{1+\theta^{-1}} + n_1^{\rho+1+\varepsilon} \geq 0,$$

(¹) BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 62. On le voit immédiatement en déterminant une limite supérieure de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_r \varphi(z)\, z^{-m-1}\, dz = a_m,$$

prise le long du cercle de rayon r ayant pour centre l'origine dans le plan complexe des z, puis faisant $m = n_1$.

μ étant une constante > 0. Or

$$\rho + \varepsilon < \theta^{-1} = \left(\frac{1}{\rho} - \tau\right)^{-1},$$

puisque

$$(\rho + \varepsilon)\left(\frac{1}{\rho} - \tau\right) = 1 + \frac{\varepsilon}{\rho} - \varepsilon\tau - \rho\tau < 1,$$

ε pouvant être choisi aussi petit qu'on veut dès que n est assez grand. On n'a donc pas $X_r \geqq 0$, et (13) ne peut avoir lieu. C. Q. F. D.

Ceci posé, on pourra définir la *croissance* régulière ou irrégulière des séries $\varphi(x)$: $\varphi(x)$ aura sa croissance régulière si, dès que $r > \xi$ (ξ arbitraire assez grand), on a

$$r^{(\log r)^{\frac{1}{\rho} - \varepsilon_2}} < M_r < r^{(\log r)^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon_2}};$$

si la croissance n'est pas régulière, elle sera dite *irrégulière*. On pourra chercher, comme je l'ai fait ailleurs [1] à propos de la première classification des fonctions entières, un critère pour reconnaître les fonctions à croissance régulière d'après leur développement en série. Je n'insiste ni sur ce point, ni sur l'extension des théorèmes fondamentaux I et II aux fonctions entières d'ordre (k, ρ^{-1}) où $-h = k < -1$, c'est-à-dire aux fonctions qui jouent dans la seconde classification un rôle analogue à celui des fonctions d'indice $\geqq 2$ dans la première (ni à celles où $k = -h$ est positif).

On pourrait songer à faire application des propriétés des fonctions entières considérées dans la seconde classification, avec k négatif, à la théorie des nombres transcendants : je ne m'y attarde pas.

Bien entendu, cette seconde classification s'étend aux fonctions entières où k est positif, et, pour qui connaît les principes de la théorie des fonctions quasi-entières, méromorphes et quasi-méromorphes, à toutes ces fonctions.

Il est important de remarquer que *les deux classifications coïncident pour les fonctions entières dites d'ordre fini* ($k = 0$).

Enfin, on peut combiner les deux classifications pour en obtenir deux autres : adopter l'une d'elles quand $k \geqq 0$, l'autre pour $k < 0$,

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 1904, p. 162 et 1905, p. 1 et suiv.; *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, 1902, p. 447; *voir* encore la Note (1) de la page suivante.

comme je l'ai fait (Chap. I, n° 10) pour les fractions continues arithmétiques. Ainsi, on pourra prendre la première classification pour $k \geqq 0$, la deuxième pour $k < 0$.

Le lecteur qui désirerait approfondir ces questions pourra se reporter aux Mémoires indiqués ci-après ou plus loin (Bibliographie). Je me contenterai de signaler les énoncés suivants :

1° *Une fonction entière d'ordre* $\leqq (-h, \rho^{-1})$, *où* $h > 0$, *c'est-à-dire pour laquelle*

$$|a_n|^{-1} \geqq e_h(n^{\rho+\varepsilon})^n$$

à partir d'une certaine valeur de n, a son module au plus égal à

$$r^{(\log_h r)^{\rho^{-1}+\varepsilon_1}}, \tag{14}$$

dès que $|x| = r$ *est assez grand* (¹).

2° *Une fonction entière d'ordre* $(-h, \rho^{-1})$, *c'est-à-dire une fonction pour laquelle* (4) *et* (5) *ont lieu, a, pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes, son module au moins égal à*

$$r^{(\log_h r)^{\rho^{-1}-\varepsilon_1}}. \tag{15}$$

Les démonstrations sont tout à fait analogues à celles données ci-dessus pour le cas où $h = 1$. On dira encore que la fonction entière d'ordre $(-h, \rho^{-1})$ a sa *croissance régulière* quand son module est au moins égal à (15) *pour toute valeur de r supérieure à une certaine limite.*

3° *Soit* r_n *le module du* $n^{ième}$ *zéro* x_n *d'une fonction entière, dont les zéros sont rangés par ordre de modules croissants : si l'on a, pour n assez grand,*

$$r_n > e_h(n^{\rho-\varepsilon_1}), \tag{16}$$

(¹) Une formule équivalente se trouve indiquée avec d'autres aussi intéressantes dans un élégant article de M. E. Lindelöf, paru dans le numéro d'août du *Bulletin des Sciences mathématiques* (article daté d'avril 1903); de mon côté j'ai publié la première classification pour les fonctions entières d'ordre 0 dans les *Comptes rendus* du 17 août 1903 sans connaître cet article de M. E. Lindelöf, probablement encore à ce moment en cours d'impression.

le module de la fonction entière est au plus égal à (14) *dès que r est assez grand* (1).

4° *Réciproquement, si le module d'une fonction entière est au plus égal à* (14) *dès que r est assez grand, le module du* $n^{\text{ième}}$ *zéro satisfait à* (16).

5° *Le module* r_n *du* $n^{\text{ième}}$ *zéro d'une fonction entière d'ordre* $(-h, \rho^{-1})$ *satisfait à* (16), *et, pour une infinité de valeurs* n_1 *de n, à*

$$r_{n_1} \leqq e_h(n_1^{\rho+\varepsilon}).$$

Réciproquement, si, pour une infinité de valeurs n_1 *de n, le* $n^{\text{ième}}$ *zéro d'une fonction entière satisfait à cette inégalité, son ordre est* $\geqq (-h, \rho^{-1})$.

On comprendra mieux la portée de ces résultats en se rappelant que toute fonction entière d'ordre $< (0, 1)$ est de la forme

$$A_0 z^m \prod_1^\infty (1 + z z_n^{-1}),$$

où A_0 est une constante, m un entier $\geqq 0$, z_n le $n^{\text{ième}}$ zéro $\neq 0$.

II.

Des groupes de fonctions entières. — Soient $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... un ensemble E de fonctions telles que $\varphi_a[\varphi_b(z)] = \varphi_a(\varphi_b) = \Phi_{ab}$ fasse partie de l'ensemble : je dirai que *l'ensemble* E *est un groupe de fonctions*.

Je supposerai ici que φ_1, φ_2, ... sont des fonctions entières. Soit

$$|\varphi_a| < r^{(\log_{h_a} r)^{\sigma_a+\varepsilon}}, \qquad |\varphi_b| < r^{(\log_{h_b} r)^{\sigma_b+\varepsilon}}, \qquad h_a \text{ et } h_b \geqq 1,$$

(1) Je n'indique pas les démonstrations des propriétés III et IV : on les obtient en simplifiant ou complétant des démonstrations données par M. Ruben Mattson dans une thèse (Upsal, Almqvist et Wiksell, 1905) soutenue le 6 décembre 1905, p. 49-63. Je n'ai pu me passer d'un élégant théorème de M. Jensen pour établir la propriété IV. Quant à la propriété V, elle résulte facilement de III et IV.

dès que $r = |z|$ est assez grand, $\Phi_{ab} = \varphi_a(\varphi_b)$. On a

$$(17)\quad |\Phi_{ab}| < |\varphi_b|^{(\log_{h_a}|\varphi_b|)^{\sigma_a+\varepsilon}} < r^{(\log_{h_b} r)^{\sigma_b+\varepsilon}(\log_{h_a} r)^{\sigma'_a}} < r^{(\log_{h_c} r)^{\sigma_c}} \quad (^1),$$

où h_c est égal au plus petit des nombres h_a et h_b. Donc :

L'ensemble des fonctions entières d'ordre $< (-h, \infty)$, où h est un entier donné > 0, forme un groupe.

D'autre part, je suppose que φ_b soit justement d'ordre $(-h_b, \sigma_b)$; soit z_1 le zéro de module minimum $\neq 0$ de φ_a : Φ_{ab} a toutes les racines de $\varphi_b(z) - z_1 = 0$. D'après la propriété 5°, le $n^{\text{ième}}$ zéro de $\varphi_b(z) - z_1 = 0$ a son module $\leqq e_{h_b}(n^{\rho_b+\varepsilon_1})$, où $\rho_b\sigma_b = 1$, pour une infinité de valeurs de n, et il en est de même *a fortiori* du $n^{\text{ième}}$ zéro de Φ_{ab}. D'après la propriété 5°, l'ordre de Φ_{ab} est au moins égal à $(-h_b, \sigma_b)$. Donc :

Si φ_a et φ_b sont d'ordres $(-h_a, \sigma_a)$, $(-h_b, \sigma_b)$, avec h_a et $h_b \geqq 1$, l'ordre de $\varphi_a(\varphi_b) = \Phi_{ab}$ est $\geqq (-h_b, \sigma_b)$.

En particulier :

L'ensemble des fonctions entières d'ordre zéro et de même indice h (c'est-à-dire pour lesquelles h a même valeur entière $\geqq 1$) forme un groupe; de même pour l'ensemble des fonctions entières d'ordre zéro et d'indice infini ($h = \infty$).

Je me bornerai dès lors à indiquer que, grâce à un théorème connu de M. Picard et ses divers perfectionnements, des procédés tout semblables permettent d'établir les propriétés suivantes dans la première classification.

Si φ_a et φ_b sont deux fonctions entières d'ordres (k_a, σ_a), (k_b, σ_b), avec k_a et k_b entiers $\geqq 0$, l'ordre de $\Phi_{ab} = \varphi_a(\varphi_b)$ est au plus égal à $(k_a + k_b + 1, \sigma_b)$ et au moins égal à (k_b, σ_b).

Il y a ici une légère difficulté facile à surmonter, et provenant du fait que $\varphi_a(z)$ peut n'avoir qu'une racine au plus; alors $\varphi_a = e^{\psi_a}F$, $F = A$ ou $F = A(z - \alpha)$ avec A constant; $\psi_a(z)$ est un polynome

---

(1) On peut préciser la valeur de σ_c, soit quand $h_a = 1$, soit quand $h_a > 1$: je ne m'y arrête pas. Φ_{ab} est évidemment une fonction entière.

ou une fonction entière d'ordre $(k_a - 1, \sigma_b)$ sur laquelle on raisonne comme sur φ_a.

Forment encore des groupes :

1° *L'ensemble des fonctions entières d'ordre* > 0 *non transfini* (k_a *fini* $\neq 0$, *ou* $\sigma_a > 0$); 2° *l'ensemble des fonctions entières d'ordre (nul ou non) non transfini;* 3° *l'ensemble des fonctions entières d'ordre transfini* ($k_a = \infty$); 4° *l'ensemble de toutes les fonctions entières.*

Autres catégories de groupes. — On peut dire encore par exemple que l'ensemble E_1 des polynomes et des fonctions entières $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ forme un groupe si la somme, la différence, le produit de ces fonctions 2 à 2, 3 à 3, etc. appartiennent à E_1 ; on peut spécifier des conditions complémentaires, par exemple exiger que $f[x, \varphi_a, \varphi'_a, \ldots, \varphi^{(p)}(a)]$, où f est un polynome en x, φ_a, φ'_a, ..., $\varphi^{(p)}(a)$, fasse partie de E_1 : c'est ce que je supposerai ici (¹). La somme de deux fonctions entières d'un même ordre pouvant être d'un ordre inférieur, on a des énoncés moins précis; ainsi :

Forment un groupe :

1° *L'ensemble des polynomes et des fonctions entières d'ordre* 0 *et d'indice* $\geqq h$; 2° *l'ensemble des polynomes et des fonctions entières d'ordre* 0 *et d'indice infini* h; 3° *l'ensemble des polynomes et des fonctions entières d'ordre (nul ou non) non transfini;* 4° *l'ensemble de toutes les fonctions entières.*

On pourra chercher à obtenir des énoncés analogues en ne considérant que des fonctions entières plus particulières, par exemple des fonctions entières à croissance régulière : je n'insiste pas.

(¹) On peut aussi exiger que $\varphi_a(\varphi_b)$ appartienne à E_1. Alors ces groupes seront compris dans les groupes étudiés précédemment.

Il y a des extensions aux fonctions quasi-entières, méromorphes, quasi-méromorphes.

NOTE II.

SUR L'ORDRE DES NOMBRES DE LIOUVILLE.

Soit

$$I_n = P_n Q_n^{-1} = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n,$$

la $n^{\text{ième}}$ réduite du développement en fraction continue ordinaire de l'irrationnelle *positive* I. On a, pour $i > 1$,

$$Q_{i-1} a_i < Q_i = Q_{i-1} a_i + Q_{i-2} < Q_{i-1}(a_i + 1),$$

d'où (¹)

$$(3_6) \qquad a_1 a_2 \ldots a_n < Q_n < (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1) \leqq 2^n a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Je vais m'occuper de I au point de vue des deux premières classifications des fractions continues (la troisième étant une conséquence des deux autres).

Première classification. — Soit I une irrationnelle positive d'ordre (k, ρ) dans la première classification, c'est-à-dire dans celle où les secondes formules (15) et (16) du Chapitre I sont applicables, que k soit positif ou négatif. On a, pour $n > \nu$,

$$(4_6) \qquad a_n < e_k(n)^{\rho+\varepsilon},$$

et, pour une infinité de valeurs n_1 de n,

$$(5_6) \qquad a_{n_1} > e_k(n_1)^{\rho-\varepsilon}$$

(ε fixe positif aussi petit qu'on veut dès que ν est assez grand).

On a

$$(6_6) \qquad Q_n < A\, 2^n \prod_1^n e_k(i)^{\rho+\varepsilon} \qquad (\text{A const.}).$$

(¹) Je continue la numérotation des formules du Chapitre VI. Incidemment je signale ici que l'on peut probablement simplifier la démonstration de la propriété IV, p. 51, car, si $n' > n$, on doit avoir $k' > k$. En effet, d'après une vérification rapide, je crois que, si $|I - I_{n'}| < |I - I_n|$, on a $|J - J_{k'}| < |J - J_k|$, quand n est assez grand.

A quelles conditions I est-il un nombre de Liouville ? Il faut et il suffit

$$|I - I_n| < Q_n^{-\alpha_1},$$

pour une infinité de valeurs de n, si grand que soit α_1, c'est-à-dire, puisque, d'après (13) (condition nécessaire) et le Chapitre I, n° 8 (condition suffisante),

$$(Q_n^2 a_{n+1})^{-1} > |I - I_n| > (4 Q_n^2 a_{n+1})^{-1},$$

(7₆) $$a_{n+1} > Q_n^{\alpha} \quad (\alpha \text{ analogue à } \alpha_1).$$

On sait (pages 3 et 42) que $Q_n \geqq 2^{\frac{n-1}{2}}$; donc, quand I est un nombre transcendant de Liouville,

$$a_{n+1} > 2^{\frac{n-1}{2}\alpha} = e^{\frac{n-1}{2}\alpha \log 2} = e^{n\rho_1},$$

où ρ_1 est aussi grand qu'on veut; par suite :

Une irrationnelle (¹) *d'ordre* $< (1, \infty)$ (*première classification*) *n'est pas un nombre transcendant de Liouville.*

Soit donc $k \geqq 2$. Pour que I soit transcendant de Liouville, il suffit, a_{n+1} étant un quotient incomplet *principal*, c'est-à-dire satisfaisant à (5₆),

$$a_{n+1} > e_k(n+1)^{\rho-\varepsilon} > \left(A\, 2^n \prod_1^n e_k(i)^{\rho+\varepsilon}\right)^{\alpha},$$

d'après (7₆), ou

$$(\rho - \varepsilon)\, e_{k-1}(n+1) > \alpha \left[\log A + n \log 2 + (\rho + \varepsilon) \sum_1^n e_{k-1}(i)\right].$$

Ceci exige $k \geqq 3$; j'admets qu'il en soit ainsi; on a

$$\log A + n \log 2 < (\rho + \varepsilon)\, e_{k-1}(n),$$

et il suffit

$$e_{k-1}(n+1) > n^2 e_{k-1}(n),$$

(¹) COROLLAIRE. — *Pour chacune de ces irrationnelles, il y a des nombres fixes* λ *et* μ *tels que*

$$a_{n+1} < Q_n^{\lambda}, \quad |I - I_n| > Q_n^{-\mu}.$$

ou, *a fortiori*,

$$e_{k-2}(n+1) > 2e_{k-2}(n) > \log n^2 + e_{k-2}(n).$$

Ceci est vrai pour $k=3$; quand $k>3$, il suffit

$$e_{k-3}(n+1) > 2e_{k-3}(n) > \log 2 + e_{k-3}(n),$$

ce qui a lieu pour $k=4$, etc.

Ce résultat s'étend aux cas intermédiaires où l'ordre I est (k, ρ) avec ρ nul ou infini. Soit

$$a_n = e_k(n)^{\rho_n},$$

où ρ_n peut prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut pour une infinité de valeurs de n assez grandes : on raisonnera sur les quotients incomplets a_{n+1} pour lesquels $\rho_{n+1} \geqq \rho_{n-i+1}$ quel que soit $i>0$, et que l'on peut appeler provisoirement *principaux* (¹). Donc

Une irrationnelle d'ordre $>(3, 0)$ (*première classification*) *est un nombre transcendant de Liouville.*

On voit qu'il y a une catégorie intermédiaire, celle des fractions continues d'ordre $(2, \rho)$, pour laquelle on ne sait rien. On peut montrer que :

Parmi les irrationnelles d'ordre $(2, \rho)$ (*première classification*), *certaines sont des nombres de Liouville, certaines n'en sont pas.*

Soit d'abord une irrationnelle I *régulière.*

Définition. — Une irrationnelle I d'ordre (k, ρ) est dite *régulière*, si, à partir d'une certaine valeur de n, tous ses quotients incomplets sont tels que (²)

$$(8_6) \qquad a_n = e_k(n)^{\rho_n} \qquad (\rho + \varepsilon > \rho_n > \sigma > 0, \ \sigma \text{ fixe}).$$

Soit $k=2$; si I était un nombre de Liouville, il faudrait, d'après (3_6)

(¹) La même démonstration s'applique évidemment aux fractions continues d'ordre $>(k, \infty)$, pour lesquelles on peut toujours écrire $a_n = e_k(n)^{\rho_n}$, en particulier aux fractions d'ordre infini (p. 10).

(²) Peut-être, parmi ces irrationnelles, y aurait-il lieu de distinguer celles où

$$\rho_n = \rho + \varepsilon_n \qquad (\lim \varepsilon_n = 0 \text{ pour } n = \infty);$$

on pourrait les appeler *régulières*, et les autres *semi-régulières*.

et (7_6),

$$a_{n+1} > (a_1 a_2 \ldots a_n)^\alpha,$$

et, *a fortiori*,

$$e_2(n+1)^{\rho+\varepsilon} > \left[A_1 \prod_1^n e_2(i)^\sigma \right]^\alpha \qquad (A_1 \text{ const.}),$$

$$(\rho + \varepsilon)\, e^{n+1} > \alpha \log A_1 + \sigma\alpha \sum_1^n e^i,$$

ce qui est impossible : I n'est pas un nombre de Liouville.

D'autre part, I, d'ordre (2, ρ), non régulière, sera un nombre de de Liouville si

$$e_2(n+1)^{\rho-\varepsilon} > (2^n a_1 a_2 \ldots a_n)^\alpha,$$

a_{n+1} étant quotient principal, ou si

$$(\rho - \varepsilon)\, e^{n+1} > \alpha n \log 2 + \alpha \sum_1^n \log a_i.$$

Il est intuitif que, quand les quotients incomplets satisfaisant à une égalité analogue à (8_6) sont assez espacés, la condition ci-dessus est satisfaite (¹). On le vérifie quand

$$\log a_{n+1} \geqq n^{1+\varepsilon} \log a_i \qquad (i \leqq n);$$

alors en effet

$$\sum \log a_i \leqq n^{-\varepsilon} \log a_{n+1},$$

et il suffit

$$\log a_{n+1} > \alpha n \log 2 + \alpha n^{-\varepsilon} \log a_{n+1},$$

ce qui a lieu si petit que soit le nombre fixe positif ε, dès que n est assez grand (²).

(¹) Peut-on assigner au sujet de cet espacement une condition simple, nécessaire et suffisante ? L'existence de critères analogues pour la régularité de croissance des fonctions entières, basés sur l'espacement des coefficients principaux du développement en série de ces fonctions, permet de l'espérer.

(²) Voici ce qui aidera à comprendre la portée des classifications des irrationnelles : j'écris $a_n = e_k(n)^{\tau_n}$; soit k le plus petit des entiers tels que $\tau_n < \theta'$ (θ' fini) quel que soit n; si l'on a $\tau_n > \theta$ (θ fixe > 0) pour cette valeur de k et une infinité de valeurs de n, on démontre l'existence (*Journ. de Math.*, 1904, p. 279) d'un nombre ρ tel que la suite des a_n soit d'ordre (k, ρ) dans la première classification. Une irrationnelle a ainsi toujours un ordre.

Une remarque analogue peut se faire pour la deuxième classification, quand on écrit $a_n = e_k(n^{\tau_n})$.

En résumé :

Théorème. — *Dans la première classification, une irrationnelle positive d'ordre (k, ρ) est un nombre de Liouville quand $(k, \rho) > (3, 0)$ et n'en est pas un quand $(k, \rho) < (1, \infty)$.*

Lorsque $k = 2$ et que ρ est fini, les deux cas sont possibles.

Des irrationnelles régulières. — Soit $k \geqq 3$. On a, pour n assez grand, λ et μ étant des constantes > 0, et

$$e_k(1)\,e_k(2)\ldots e_k(n) = \theta_n,$$
$$\lambda\theta_n^{\rho+\varepsilon} > a_1 a_2 \ldots a_n > \mu\theta_n^{\sigma};$$

de plus, on a

$$1 < \theta_{n-1} < e_k(n-1)^n < e_k(n)^{\varepsilon}, \qquad e_k(n-1) < e_k(n)^{\frac{\varepsilon}{n}},$$

si

$$e_{k-1}(n-1) < \frac{\varepsilon}{n} e_{k-1}(n), \qquad e_{k-2}(n-1) < \log\frac{\varepsilon}{n} + e_{k-2}(n);$$

ceci a lieu pour $k = 3$. Quand $k > 3$, ceci est encore vrai d'après

$$e_{k-1}(n) > e^n > \frac{n^2}{\varepsilon^2}, \qquad \frac{\varepsilon}{n} > e_{k-1}(n)^{-\frac{1}{2}},$$

si

$$(9_6) \qquad e_{k-1}(n-1) < e_{k-1}(n)^{\frac{\varepsilon}{n}} < e_{k-1}(n)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui a lieu pour $k = 4$; et ainsi de suite. On conclut

$$\theta_n = e_k(n)^{1+\eta_n} \qquad (\lim \eta_n = 0 \text{ pour } n = \infty),$$
$$a_1 a_2 \ldots a_n = e_k(n)^{\sigma_n}, \qquad 2^n a_1 a_2 \ldots a_n = e_k(n)^{\sigma_n + \varepsilon_n}$$

(σ_n comme ρ_n, ε_n comme η_n), et, d'après (3_6) et (9_6),

$$(10_6) \qquad Q_n = e_k(n)^{\sigma_n + \varepsilon'_n} = Q_{n+1}^{\varepsilon''_n}.$$

Soit I′ une autre irrationnelle positive d'ordre (k, ρ'), avec ρ' analogue à ρ, $I'_n = P'_n Q'^{-1}_n$ sa $n^{\text{ième}}$ réduite; si elle est régulière,

$$(11_6) \qquad Q'_n = e_k(n)^{\sigma'_n} = Q'^{\varepsilon'''_n}_{n+1} \qquad (\sigma'_n \text{ comme } \sigma_n).$$

Les formules (9_6), (10_6) et (11_6) montrent que I et I' sont des nombres correspondants au sens du Chapitre III (pages 27 et suiv., page 36).

Quand I' n'est pas régulière, soit a'_{n+1} un de ses quotients tels que

$$a'_{n+1} = e_k(n+1)^{\rho_{n+1}} \qquad (0 < \tau < \rho_{n+1} < \rho' + \varepsilon, \ \tau \text{ fixe} > 0);$$

on a encore

$$Q'_n \leqq e_k(n)^{\rho'+\varepsilon'}, \qquad Q'_{n+1} = e_k(n+1)^{\sigma'_{n+1}};$$

soit

$$p_n = P'_n Q_n, \qquad q_n = Q'_n Q_n = e_k(n)^{\lambda_n} \qquad (\lambda_n \text{ comme } \rho_{n+1}),$$
$$I'_n = p_n q_n^{-1}:$$

d'après (9_6),

$$(12_6) \qquad \begin{cases} |\, I' - I'_n \,| = \gamma (Q'_n Q'_{n+1})^{-1} = Q'^{-1-\eta'_n}_{n+1} = \eta''_n q_n^{-\alpha} \\ \qquad (\gamma \text{ fini} > 0, \ 0 < \eta''_n < 1), \end{cases}$$

formule qui s'applique aussi quand I' est régulière.

On en conclut que I' est aussi un nombre correspondant de I; mais cette correspondance n'a plus, en général, le même caractère que quand I' est régulière; ici la correspondance entre I et I' résulte de la considération de la suite des réduites principales de I' et de celle des réduites de même rang de I; une irrationnelle I'' non régulière n'ayant pas une infinité de réduites principales de mêmes rangs que I' ne correspond pas forcément à I'.

En particulier, d'après ce qui précède :

Deux nombres réguliers positifs quelconques de Liouville de même indice k et d'ordre $>(3,0)$ sont des nombres correspondants au sens du Chapitre III.

Dès lors, l'ensemble des nombres *réguliers* positifs de Liouville d'indice donné $k \geqq 3$ et d'ordre (k, ρ), où ρ prend toutes les valeurs finies non nulles, appartient, par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, à un groupe H de nombres qui sont des nombres rationnels ou des nombres de Liouville.

Quand on ne considère parmi ces opérations que l'addition et la multiplication, on arrive à un résultat plus précis.

Soit J un nombre de Liouville positif correspondant de I qui soit

limite de la suite de fractions distinctes à partir d'un certain indice

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_n, \quad \ldots.$$

$J_n = p_n q_n^{-1}$ (p_n, q_n premiers entre eux ou non), $J - J_n$ étant de même signe que $I - I_n$ et tel que, pour n assez grand,

$$J - J_n = q_{n+1}^{-\lambda_n+1}, \qquad q_{n+1} = Q_{n+1}^{\mu_n} \qquad (\lambda_n \text{ et } \mu_n \text{ finis} > \lambda > 0);$$

d'après (10_6),

$$q_n = q_{n+1}^{\varepsilon_n};$$

J_n est une réduite de I, qui n'est pas forcément de rang n; les nombres J comprennent tous les nombres réguliers de même indice k que I et d'ordre (k, ρ) avec $0 < \rho < \infty$.

$$J - J_n, \quad J' - J'_n, \quad J + J' - J_n - J'_n, \quad JJ' - J_n J'_n$$

sont de mêmes signes; $J + J'$, JJ' ne sont pas rationnels; $J_n + J'_n$ et $J_n J'_n$ en sont des réduites. Soit

$$\chi_{n+1} = q_{n+1} q'_{n+1} = Q_{n+1}^{\mu'_n}:$$
$$|J + J' - J_n - J'_n| = \chi_{n+1}^{-\nu_n+1},$$
$$|JJ' - J_n J'_n| = \chi_{n+1}^{-\nu'_n+1}$$

(μ'_n, ν_n, ν'_n analogues à λ_n). D'après (9_6),

$$J_1 + J'_1, \quad \ldots, \quad J_n + J'_n, \quad \ldots,$$
$$J_1 J'_1, \quad \ldots, \quad J_n J'_n, \quad \ldots$$

sont, à partir d'un certain indice, des suites de fractions distinctes qui sont des réduites de rangs croissants de $J + J'$ et JJ'; $J + J'$ et JJ' sont analogues à J.

Par conséquent, par addition et multiplication, les nombres J engendrent un groupe G_1 contenant le groupe analogue G dérivé des nombres réguliers I d'indice donné $k \geqq 3$ et d'ordre (k, ρ) avec $0 < \rho < \infty$. On a alors, pour les nombres de G, $q_n = e_k(n)^{\rho_n}$, ρ_n analogue à λ_n. D'autre part, les J_n étant des réduites distinctes de rang croissant de J dès que $n > \nu$, on a $J_n = \mathfrak{J}_p$, $\mathfrak{J}_p$ étant la $p^{\text{ième}}$ réduite $\gamma_p \delta_p^{-1}$ de J et $p \geqq n - \nu$. D'après (13),

$$|J - J_n| = |J - \mathfrak{J}_p| = (\theta \delta_p^2 b_{p+1})^{-1} = e_{k+1}(n+1)^{-\rho'_n},$$

si

$$J = b_0 + 1 : b_1 + 1 : b_2 + 1 : b_3 + \ldots, \qquad 1 < \theta < 4 \qquad (\rho'_n \text{ analogue à } \rho_n);$$
$$\delta_p \leqq q_n = q_{n+1}^{\varepsilon_n}, \qquad b_{p+1} = e_k(n+1)^{\rho'_n} \qquad (\rho''_n \text{ comme } \rho_n).$$

On peut en conclure directement que J est d'ordre $\leqq (k, \rho'')$; on peut aussi remarquer que J est de même ordre que

$$K = c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \ldots + 1 : c_n + \ldots.$$

où $b_p = c_{p+\nu}$, c_0, c_1, c_2, $\ldots$, c_ν étant des entiers positifs arbitraires (Chap. III, p. 53); alors

$$c_{p+\nu+1} = e_k(n+1)^{\rho'_n}, \qquad p + \nu \geqq n,$$

en sorte que J et K ne peuvent être d'ordre supérieur à (k, ρ), où ρ est fini. Donc

Théorème. — *L'ensemble des nombres de Liouville positifs réguliers d'indice donné* $k \geqq 3$ *et d'ordre* (k, ρ) (*première classification*), *où* ρ *prend toutes les valeurs positives finies* > 0, *engendre par addition et multiplication un groupe de nombres de Liouville d'indice* $\leqq k$ *et d'ordre* $< (k, \infty)$.

On sait que tous ces nombres sont tous d'ordre $\geqq (1, \infty)$.

Un théorème analogue a lieu pour le groupe G_1 et pour le groupe dérivé d'un nombre fini de nombres de Liouville positifs et réguliers.

On ne peut s'empêcher de rapprocher cet énoncé de certains de ceux obtenus pour les fonctions entières, et, dès lors, d'espérer des analogies plus complètes entre les notions d'ordre dans les deux théories. Ainsi, on peut se demander si, dans le groupe G, les irrationnelles ne sont pas toutes d'indice k et, peut-être, régulières.

De ce qui précède résulte en particulier que tout polynome à coefficients rationnels positifs formé avec les nombres réguliers en question appartient au groupe G; I étant un de ces nombres réguliers, I^q est compris dans G (q entier > 1). Mais ce groupe contiendra aussi forcément des nombres réguliers I qui ne sont puissances d'aucun nombre de Liouville. En effet,

$$I_n = P_n Q_n^{-1},$$

avec P_n, Q_n premiers entre eux,

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}, \qquad Q_{n+1} = a_{n+1} Q_n + Q_{n-1}.$$

On prendra

$$Q_0 = 1, \qquad Q_{2n-1} = 12 h_n + 2, \qquad Q_{2n} = 18 l_n + 3, \qquad n \geqq 1,$$

h_n, l_n entiers positifs. Ceci est toujours possible d'une infinité de manières, tout en ayant, pour n assez grand ([1]),

$$a_n = e_k(n)^{\rho_n}, \qquad \rho + \varepsilon > \rho_n > \sigma > 0,$$

car il suffit de prendre

$$Q_1 = a_1 = 12 h_1 + 2,$$
$$Q_2 = a_1 a_2 + 1 = 18 l_1 + 3 = a_2(12 h_1 + 2) + 1,$$

ou

$$9 l_1 + 1 = a_2(6 h_1 + 1),$$

puis, en général, pour $n \geqq 1$,

$$Q_{2n+1} - Q_{2n-1} = 12(h_{n+1} - h_n) = a_{2n+1} Q_{2n} = a_{2n+1}(18 l_n + 3),$$
$$Q_{2n+2} - Q_{2n} = 18(l_{n+1} - l_n) = a_{2n+2} Q_{2n+1} = a_{2n+2}(12 h_{n+1} + 2),$$

ou

$$4(h_{n+1} - h_n) = a_{2n+1}(6 l_n + 1), \qquad 9(l_{n+1} - l_n) = a_{2n+2}(6 h_{n+1} + 1),$$

a_1 et h_1, a_2 et l_1 étant choisis convenablement. Par exemple, si l'on prend, pour $n \geqq 1$,

$$a_{2n+1} = 4 \alpha_{2n+1}, \qquad a_{2n+2} = 9 \alpha_{2n+2} \qquad (\alpha_i \text{ entier}),$$
$$h_{n+1} = h_n + (6 l_n + 1)\alpha_{2n+1}, \qquad l_{n+1} = l_n + (6 h_{n+1} + 1)\alpha_{2n+2},$$

on peut choisir

$$h_1 = 0, \qquad a_1 = 2, \qquad l_1 = 0, \qquad a_2 = 1,$$

([1]) Quand on ne s'impose que les conditions $\rho_n = \rho + \varepsilon_n$ pour une infinité de valeurs de n, $\rho_n \leqq \rho + \varepsilon$ quel que soit $n > \nu$, les mêmes calculs donnent pour I un nombre de Liouville, régulier ou non, qui n'est puissance d'aucun nombre de Liouville.

et les formules précédentes déterminent des valeurs convenables des h_n, l_n sous la seule condition

$$\alpha_i = e_k(i)^{\rho_i},$$

pour i assez grand (¹). On sait d'ailleurs qu'une puissance $q^{\text{ième}}$ exacte, paire ou divisible par 3, est $\equiv 0 \pmod 4$ ou $\equiv 0 \pmod 9$. Donc, aucune des quantités Q_n n'est puissance $q^{\text{ième}}$ exacte, quel que soit $q > 1$, et le nombre I régulier n'est puissance d'aucun nombre de Liouville. Alors $I^{q^{-1}}$, où q est entier, n'est pas un nombre de Liouville (Chap. III, p. 44), tout en étant transcendant. $I^{q^{-1}}$ est d'ailleurs d'ordre $< (3, 0)$, I étant d'ordre $(k, \rho) > (3, 0)$ et k, ρ quelconques. Donc :

Il existe une infinité de nombres transcendants d'ordre $< (3, 0)$ dans la première classification, et dont la puissance $q^{\text{ième}}$ (q entier) est d'ordre $(k, \rho) > (3, 0)$, avec k entier arbitraire, $\rho > 0$ arbitraire.

On voit à quelles difficultés on peut se heurter en cherchant à établir une relation entre l'ordre d'un nombre transcendant et celui de ses puissances entières, quand ce nombre n'est pas un nombre transcendant de Liouville.

Deuxième classification. — Soit une irrationnelle I d'ordre (k, ρ) dans la première classification : pour une infinité de valeurs de n,

$$a_n = e_k(n)^{\rho+\varepsilon_n} = e_{k_1}(n^{\sigma_n}),$$
$$(\rho + \varepsilon_n)\, e_{k-1}(n) = e_{k_1-1}(n^{\sigma_n}).$$

Si l'on prend $k_1 = k + 1$, on a $\sigma_n < 1$; de même si l'on prend $k_1 = k - 1$, on a $\sigma_n > 1$. De plus, quand $k = 0$, on a $k_1 = 0$, $\sigma_n = \rho + \varepsilon_n$; quand $k = k_1 \geqq 1$, $\rho \neq 0$, $\sigma_n = 1 + \varepsilon'_n$. Une irrationnelle d'ordre $< (1, \infty)$ dans la première classification est d'ordre $\leqq (1, 1)$ dans la deuxième ; inversement, une irrationnelle d'ordre $< (1, 1)$

(¹) Il en résulte que l'ensemble (au sens de M. Cantor) des nombres transcendants de Liouville en question, d'ordre (k, ρ), avec k, ρ donnés, et qui ne sont puissance d'aucun nombre de Liouville a la puissance du continu. Le lecteur formera sans peine des exemples numériques précis ; on prendra, par exemple, $\alpha_i = E[e_k(i)^\rho]$, où ρ est fixe.

dans la deuxième est d'ordre $<(1, \infty)$ dans la première. Par une discussion analogue, on déduit finalement des résultats obtenus pour la première classification :

Dans la deuxième classification, I *est un nombre de Liouville quand* $(k, \rho) > (3, 1)$, *et n'en est pas un quand* $(k, \rho) < (1, 1)$. *Quand* $(k, \rho) = (2, 1)$ *les deux cas sont possibles.*

Il reste à examiner le cas où I est d'ordre $(k, \rho) > (1, 1)$ et $\leqq (3, 1)$.

Soit, en général, une irrationnelle I, d'ordre $\geqq (k_1, \rho_1)$ quelconque avec $k_1 > 0$, $a_n = e_{k_1}(n^{\sigma_n})$, et, pour une infinité de valeurs de n, $\sigma_n > \rho_1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Je considère la suite des quantités

$$A_m = e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon})^{-1} \log a_m;$$

parmi elles, il y en a une infinité qui croissent indéfiniment avec m si

$$e_{k_1-1}\left(m^{\rho_1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) > \alpha\, e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon}),$$

dès que m est assez grand, α étant fixe aussi grand qu'on veut ; ceci est vrai pour $k_1 = 1$ et se vérifie de proche en proche pour $k_1 = 2$, 3, ... Alors, je dis que :

Il y a une fonction φ_m *constamment croissante de m telle que*

$$\log a_m \leqq e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_m,$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de m.

En effet, il suffit de suivre une méthode déjà utilisée par M. Hadamard pour un cas analogue (¹) : on prend deux axes rectangulaires, et l'on porte en abscisses les valeurs de m, en ordonnées celles de A_m ; soient $P_1, P_2, \ldots$ les points obtenus, P_{i_1} le premier de ces points d'ordonnée supérieure à P_1, P_{i_2} le premier après P_{i_1} d'ordonnée supérieure à P_{i_1}, etc. Je forme le polygone joignant $P_1 P_{i_1} P_{i_2} \ldots$; l'équation $y = \log \varphi_x$ qui représente ce polygone définit une fonction φ_x

(¹) *J. de Math.*, 4ᵉ série, t. IX, 1893.

croissante telle que

$$A_m \leqq \log \varphi_m, \qquad \log a_m \leqq e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_m,$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de m.

C. Q. F. D.

On conclut de là que :

Une irrationnelle I d'ordre $>(2, 1)$ (*deuxième classification*) *est un nombre de Liouville.*

Soit I une irrationnelle d'ordre $(k, \rho) \geqq (k_1, \rho_1)$, k_1 étant $\geqq 2$; il suffit, d'après (3_6) et (7_6),

$$a_{n+1} > (2^n a_1 a_2 \ldots a_n)^\alpha$$

(α fixe aussi grand qu'on veut), pour une infinité de valeurs de n, ou

$$\log a_{n+1} > n\alpha \log 2 + \alpha \sum_1^n \log a_i.$$

Je prends

$$\log a_{n+1} = e_{k_1-1}[(n+1)^{\rho_1-\varepsilon}] \log \varphi_{n+1};$$

il suffit

$$e_{k_1-1}[(n+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > 2\alpha n\, e_{k_1-1}(n^{\rho_1-\varepsilon})$$

ou

$$e_{k_1-2}[(n+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > \log(2\alpha n) + e_{k_1-2}(n^{\rho_1-\varepsilon}).$$

Il suffit que ceci ait lieu pour $k_1 = 2$, c'est-à-dire que

$$(n+1)^{\rho_1-\varepsilon} - n^{\rho_1-\varepsilon} > n^{\rho_1-\varepsilon-1} \frac{\rho_1 - \varepsilon}{2} > \log(2\alpha n),$$

ou que $\rho_1 > 1 + \varepsilon$. C. Q. F. D.

Une irrationnelle d'ordre $>(1, 1)$ *et* $\leqq (2, 1)$ (*deuxième classification*) *peut effectivement être ou ne pas être un nombre de Liouville.*

Ce sera un nombre de Liouville si, pour une infinité de valeurs de n,

$$\log a_{n+1} > \alpha n \log 2 + \alpha \sum_1^n \log a_i,$$

Soit $(k, \rho) > (1, 1)$,

$$\log a_{n+1} \geqq n^{1+\varepsilon_1} \log a_i \qquad (\text{pour } i \leqq n);$$

il suffira

$$(1 - \alpha n^{-\varepsilon_1}) \log a_{n+1} > \alpha n \log 2,$$

ce qui a bien lieu quand

$$\log a_{n+1} \geqq n^{1+2\varepsilon_1}.$$

Au contraire, soit une irrationnelle I telle que, pour $n \geqq \nu$, $a_n > e_k(n^{\rho+\varepsilon_n})$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon$, $\lim \varepsilon_n = 0$ (on pourra l'appeler *régulière* dans la deuxième classification). On a, quand $k = 1$,

$$a_{n+1} < (a_1 a_2 \ldots a_n)^\beta \qquad (\beta \text{ const.}),$$

si

$$\log a_{n+1} < (n+1)^{\rho+\varepsilon} < \beta_1 \sum_1^n i^{\rho-\varepsilon} < \beta \sum_1^n \log a_i \qquad (\beta_1 \text{ const.}),$$

ou si

$$(n+1)^{\rho+\varepsilon} < \frac{\beta_1}{2(1+\rho-\varepsilon)} (n-1)^{1+\rho-\varepsilon} < \beta_1 \int_1^{n-1} x^{\rho-\varepsilon}\, dx,$$

ce qui a lieu pour n assez grand. I n'est pas un nombre de Liouville.

Quand $k = 2$, soit une irrationnelle I telle que

$$a_n = 1 + \mathrm{E}[e_2(n^\rho)], \qquad a_i > e_2(i^\rho);$$

on a

$$a_{n+1} < (a_1 a_2 \ldots a_n)^\beta,$$

si

$$\log a_{n+1} < 1 + e_1[(n+1)^\rho] < \beta \sum_1^n e^{i^\rho} < \beta \sum_1^n \log a_i.$$

Or, $\rho \leqq 1$,

$$\sum_1^n e^{i^\rho} > \int_1^{n-1} e^{x^\rho} x^{\rho-1}\, dx > 1 + (2\rho)^{-1} e^{(n-1)^\rho};$$

il suffit $\beta > 1$,

$$e^{(n+1)^\rho} < \beta(2\rho)^{-1} e^{(n-1)^\rho},$$
$$(n+1)^\rho - (n-1)^\rho < \log\beta - \log 2\rho,$$

c'est-à-dire, d'après

$$(n+1)^\rho = (n-1)^\rho \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^\rho < (n-1)^\rho \left(1 + \frac{4\rho}{n-1}\right),$$
$$4\rho(n-1)^{\rho-1} < \log\beta - \log 2\rho,$$

ce qui a lieu pour $\rho \leqq 1$ et β assez grand. Alors I n'est pas un nombre de Liouville. C. Q. F. D.

On peut résumer ainsi ce qui précède :

THÉORÈME. — *Dans la deuxième classification, une irrationnelle positive d'ordre* (k, ρ) *est un nombre transcendant de Liouville quand* $(k, \rho) > (2, 1)$ *et n'en est pas un quand* $(k, \rho) < (1, 1)$.

Lorsque $(1, 1) < (k, \rho) \leqq (2, 1)$, *les deux cas sont possibles* (¹).

(¹) *Voir* encore *Mém.* et *C. R. du Congrès de Lyon* (Assoc. franç. pour l'avanc. des Sc., 1906) et *Bull. Soc. Math.*, 1906 : Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique, et sur les nombres de Liouville. Dans ces notes, j'ébauche une classification des fractions continues d'ordre infini, et j'indique des cas étendus où, I étant un nombre positif de Liouville, à la fois : 1° I est une fraction q^imale quasi-périodique dans le système de numération de base q; 2° $\sqrt{I}$ est une fraction continue quasi-périodique; 3° a^I (a entier), e^I et I^I sont transcendants (comp. p. 155, note (¹)). Je signale aussi des quotients convergents de produits infinis d'entiers, et qui sont des nombres de Liouville.

Conséquences : sin I est alors transcendant; si α_1 réel > 0 est algébrique, on connaît une limite supérieure de l'ordre de la fraction continue log. nép. α_1, etc.

NOTE III

SUR LES FONCTIONS HYPERTRANSCENDANTES.

Une fonction y de x qui satisfait à une relation de la forme

$$f_1(x, y) = 0, \tag{1}$$

où f_1 est un polynome en x et y, est dite *algébrique*. Si elle ne satisfait à aucune relation de cette forme, elle est dite *transcendante*.

Parmi les fonctions transcendantes, on peut considérer celles qui satisfont à une équation différentielle

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0, \tag{2}$$

d'ordre k, où f est un polynome en x, y, y', ..., $y^{(k)}$. C'est le cas de $y = e^x$, telle que $y' = y$, de $\sin x$, $\cos x$, e^{e^x}, ...; c'est encore le cas de $y = Cx^{C'}$, C et C' étant des constantes arbitraires, qui est la solution générale de $\left(\frac{xy'}{y}\right)' = 0$. J'appellerai ces fonctions *algébrico-transcendantes* (¹) et l'équation (2) *une équation différentielle rationnelle*.

D'autre part, je nommerai fonctions *hypertranscendantes* celles qui ne satisfont à aucune relation de la forme (2). L'existence de pareilles fonctions résulte, avec plus ou moins d'ampleur, des travaux de divers auteurs (²). Ainsi, d'après MM. Hölder et Hilbert, la fonction eulérienne $\Gamma(x)$ et la fonction $\zeta(s)$ de Riemann sont hypertranscendantes. J'ai pu établir (³) au sujet des équations (2), ou des

(¹) C'est l'expression de M. Moore : les fonctions hypertranscendantes sont celles qu'il appelle *transcendentally-transcendental*.

(²) On trouvera une bibliographie du sujet et des renseignements historiques dans une Note de M. Heinrich Tietze (*Monatshefte für Math. und Physik*, 16ᵉ année, p. 331).

(³) *Bull. Soc. math.*, 1902, p. 200.

équations différentielles

$$f(x, \xi_1, \ldots, \xi_l, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0, \qquad (2\ bis)$$

où f est un polynome formé avec x, y, y', ..., $y^{(k)}$ et un nombre limité l de fonctions de x arbitrairement choisies, par exemple, $\log x$, $\log\log x$, ..., e^x, e^{e^x}, ..., la fonction elliptique $p(x)$, ..., le résultat suivant que je me contente ici d'énoncer : il existe une infinité de séries $\sum a_n(x - x_0)^n$, de fonctions entières, de fonctions entières d'ordre fini déterminé, des mêmes séries ou fonctions ayant leurs coefficients rationnels, de séries divergentes sommables, de fractions continues de Stieltjes, qui ne satisfont à aucune des équations de la forme (2 *bis*) correspondant à un même système ξ_1, ..., ξ_l (¹).

Je me propose ici :

1° De démontrer des théorèmes à peu près équivalents, pour les équations (2), au théorème fondamental de Liouville sur les nombres transcendants (Chap. II), et analogues à un autre résultat obtenu par moi ailleurs (²);

2° De faire voir sommairement que certains de ces théorèmes permettent de définir des ensembles de fonctions hypertranscendantes *correspondantes,* jouissant de propriétés analogues à celles des ensembles de nombres correspondants de Liouville, au point de vue du Chapitre III (³).

(¹) Le principe de la démonstration, c'est que la solution générale de (2 *bis*) ne contient qu'un nombre limité d'arbitraires.

(²) *Journ. de Math.*, 1902, p. 42, et *Bull. Soc. math.*, 1903, p. 44.

(³) Les résultats obtenus ci-après s'étendent aux solutions formelles divergentes des équations différentielles (2).

Par définition, une série de Taylor S ou une série $S = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ quelconques satisfont formellement à une équation de la forme (2) sous la condition suivante : j'opère sur S comme si elle était absolument convergente : la valeur *formelle* d'une fonction de séries analogues à S est le résultat obtenu en y substituant ces fonctions et ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x. S satisfait formellement à (2) si, après substitution, dans la valeur formelle, les coefficients des diverses puissances de x sont tous nuls.

L'intérêt de ces considérations résulte de ce que la connaissance d'une solution formelle divergente peut fournir la valeur d'une solution de l'équation différentielle : le lecteur qui voudrait étudier la question des séries divergentes pourra se reporter aux *Leçons sur les séries divergentes* de M. E. Borel (Paris, Gauthier-Villars, 1901).

Préliminaires.

Les solutions des équations différentielles (2) peuvent se diviser en deux catégories aux environs du point x_0 : 1° celles de la forme

$$\sum_0^{\infty} a_n (x - x_0)^{\nu}$$

(x_0 a une valeur déterminée, par exemple $x_0 = 0$) données par le théorème général de Cauchy, c'est-à-dire les solutions pour lesquelles on peut, pour $x = x_0$, résoudre (2) par rapport à $y^{(k)}$, puis calculer $y^{(k+1)}$, $y^{(k+2)}$, ...; 2° les autres, qui peuvent être de la même forme.

Je considère alors les solutions de la forme

$$\sum_0^{\infty} a_n (x - x_0)^n :$$

il peut y en avoir des deux catégories.

Pour celles de la première catégorie, elles seront convergentes, et, comme on sait, elles rendront $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \neq 0$ pour $x = x_0$. Les autres, au contraire, s'il y en a, l'annuleront pour $x = x_0$ (au moins formellement, au cas où elles seraient divergentes). Soient Y_1, Y_2 deux solutions de la première catégorie :

$$Y_1 = A_0 + A_1 (x - x_0) + \ldots + A_n (x - x_0)^n + \ldots,$$
$$Y_2 = B_0 + B_1 (x - x_0) + \ldots + B_n (x - x_0)^n + \ldots.$$

On a, par exemple,

$$n!\, A_n = \frac{d^n Y_1}{dx^n} \qquad (\text{pour } x = x_0).$$

Pour calculer Y_1, on choisit les valeurs y_0, y'_0, ..., $y_0^{(k-1)}$ de y, y', ..., $y^{(k-1)}$ pour $x = x_0$, on prend l'une des valeurs correspondantes de $y^{(k)}$ déduite de (2), on la développe en série, ce qui est possible sous la forme

$$y^{(k)} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}),$$

et l'on tire $y_0^{(k)}$, $y_0^{(k+1)}$, ..., valeurs de φ et ses dérivées quand $x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}$ ont les valeurs $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(k-1)}$; finalement,

$$Y_1 = \psi(x - x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(k-1)}).$$

Il en résulte que Y_2 et ses k premières dérivées ne peuvent, pour $x = x_0$, prendre les mêmes valeurs que Y_1 sans qu'on ait $Y_1 = Y_2$. Donc, la différence $Y_1 - Y_2$ doit être pour $x - x_0$ infiniment petit d'ordre infinitésimal au plus égal à $k - 1$, c'est-à-dire à celui de $(x - x_0)^{k-1}$:

La différence de deux solutions distinctes $\sum a_n(x - x_0)^n$ de (2) données par l'application du théorème de Cauchy au cas où $x = x_0$ n'est pas d'ordre infinitésimal supérieur à $k - 1$ par rapport à $x - x_0$, quand $x - x_0$ est infiniment petit.

On peut concevoir une division des solutions en deux catégories un peu différentes : je cherche une solution y telle que y et ses $k - 1$ premières dérivées aient pour valeurs $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(k-1)}$ pour $x = x_0$, mais je considère $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(k-1)}$ comme des indéterminées : (2) donne pour $y^{(k)}$ un certain nombre de valeurs dont je choisis l'une $y_0^{(k)}$. Supposant alors les indéterminées choisies de façon que

$$f'_{y^{(k)}}(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(k)}) \neq 0, \tag{3}$$

je puis résoudre (2) par rapport à $y_0^{(k)}$, et en déduire $y_0^{(k+1)}, y_0^{(k+2)}, \ldots$, c'est-à-dire finalement une solution unique, d'après le théorème de Cauchy.

Ceci posé, soit Y une solution donnée *a priori*, Y, Y', Y'', ..., prenant pour $x = x_0$ les valeurs $Y_0, Y'_0, Y''_0, \ldots$, finies. Si, pour une valeur particulière x'_0 de x_0, ces valeurs satisfont à (3), on voit que Y est une solution donnée par l'application du théorème de Cauchy pour $x = x'_0$. Si l'on ne peut trouver une pareille valeur particulière x'_0, par exemple dans le voisinage de $x_0 = 0$, ou $x_0 = \xi_0$, on voit que Y est une solution, non seulement de l'équation (2), mais encore de l'équation différentielle (3), où l'on efface l'indice o. L'élimination de $y^{(k)}$ entre ces deux équations montre que Y est solution d'une équation d'ordre $< k$; c'est d'ailleurs une solution singulière. Donc :

Une solution de (2) finie ainsi que ses dérivées pour $x = x_0$ et dans le voisinage (x_0 arbitraire, mais fixe), qui ne satisfait pas à une équation d'ordre moindre ou de même ordre k, mais de degré moindre en $y^{(k)}$, est donnée par l'application du théorème de Cauchy pour une valeur de x égale à x_0 ou une quantité x_1 voisine de cette valeur x_0 (1).

Développements et extensions des idées de MM. Gomes-Teixera et Hurwitz.

M. Hurwitz (2), rectifiant un résultat de M. Gomes-Teixera, a établi ce théorème :

Théorème I. — *Si la série à coefficients rationnels*

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

satisfait à une équation différentielle algébrique, il existe une fonction entière à coefficients entiers

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_\nu z^\nu$$

et un nombre entier n tel que les facteurs premiers contenus dans les dénominateurs des fractions irréductibles a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...

---

(1) Dès lors, soit une solution de (2)

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

convergente, ne satisfaisant pas à une équation d'ordre k et de degré moindre en $y^{(k)}$ ou d'ordre $< k$: elle s'obtient en donnant dans

$$y = \varphi(x - x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(k-1)}),$$

où $y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(k-1)}$ sont des arbitraires, x_1 voisin de o, et φ une fonction bien déterminée, à x_1 une valeur fixe assujettie seulement à ne pas être égale pour certaines solutions à certaines valeurs particulières, et à $y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(k-1)}$ des valeurs convenables. La solution générale de la forme $\sum_0^\infty a_n x^n$ dépend ainsi d'un nombre limité d'arbitraires.

(2) *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1887 et 1889, p. 330.

divisent respectivement

$$\gamma(n),\quad \gamma(n)\gamma(n+1),\quad \gamma(n)\gamma(n+1)\gamma(n+2),\quad \ldots$$

[*n est supérieur à la plus grande racine positive de* $\gamma(z)$].

La méthode de MM. Gomes-Teixera et Hurwitz est susceptible de nombreuses applications, comme on va le voir; en particulier, on peut en déduire des propriétés analogues sans se préoccuper de la nature arithmétique des coefficients du développement de y. Il suffira de reprendre, développer et compléter convenablement les calculs de M. Hurwitz.

Je vais d'abord établir le lemme suivant :

Lemme I. — *Si une série de Maclaurin, à coefficients rationnels, satisfait formellement à une équation différentielle d'ordre k, elle satisfait à une équation différentielle rationnelle d'ordre $\leqq k$, où les paramètres sont des nombres rationnels, et même, si l'on veut, entiers.*

En effet, si une série à coefficients rationnels

$$(4)\qquad S = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}x^n + \ldots$$

satisfait formellement à une équation différentielle rationnelle

$$(5)\qquad f = \sum A x^i y^{i_0} y'^{i_1} \ldots y^{(k)i_k} = 0,$$

où les paramètres A sont quelconques, en exprimant que S est une solution, on obtiendra entre les A un certain nombre de relations linéaires homogènes $R = 0$ à coefficients rationnels permettant d'exprimer un certain nombre d'entre eux à l'aide des autres $A_1, A_2, \ldots, A_\theta$, et S satisfait à toutes les équations différentielles analogues à (5) obtenues en donnant à $A_1, A_2, \ldots, A_\theta$ des valeurs arbitraires, les autres paramètres étant déterminés par les relations $R = 0$. Prenant $A_1, A_2, \ldots, A_\theta$ rationnels, on voit que tous les paramètres A correspondants seront rationnels. On peut même alors supposer, si l'on chasse les dénominateurs, que tous les paramètres A sont entiers.

Donc, comme l'a indiqué d'ailleurs M. Hurwitz, le lemme I a bien lieu. C. Q. F. D.

Je considère maintenant une série S de la forme (4), *dont les coefficients sont ou ne sont pas rationnels*, et qui ne satisfait formellement à aucune équation différentielle rationnelle d'ordre k et de degré plus petit en $y^{(k)}$, ou encore d'ordre $< k$ (k peut être égal à o, $y^{(0)} = y$), mais est solution formelle de (2). La série S est d'ailleurs convergente ou divergente, mais j'exécute en tout cas les calculs comme si elle était absolument convergente. On a

$$\frac{df}{dx} = f'_{y^{(k)}} y^{(k+1)} + g_k = y^{(k+1)} f_k + g_k,$$

et S satisfait à

$$(6) \qquad y^{(k+1)} f_k + g_k = 0;$$

S n'annule pas f_k, puisque f_k est ou d'ordre $< k$, ou d'ordre k, mais de degré plus petit que celui de f en $y^{(k)}$. On a alors, pour $y = S$,

$$f_k = \varphi_k = A'_l x^l + A'_{l+1} x^{l+1} + \ldots,$$

où $A'_l \neq 0$, pour une valeur convenable de l : soit encore, pour (1) $y = S$, $g_k = \gamma_k$: d'après (6),

$$(7) \qquad S^{(k+1)} \varphi_k + \gamma_k = 0;$$

f_k et g_k sont des polynomes en $x, y, y', \ldots, y^{(k)}$ de degrés respectifs au plus égaux à $\lambda - 1$ et λ respectivement, si f est de degré total au plus égal à λ par rapport à ces quantités.

Soit $S_0^{(i)}$ la valeur de $S^{(i)}$ pour $x = 0$; on a

$$S = S_0 + S'_0 \frac{x}{1} + \ldots + S_0^{(n)} \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

et $a_n = S_0^{(n)}$. Par dérivation on tire de (7)

$$S^{(k+2)} \varphi_k + S^{(k+1)} \varphi'_k + \gamma'_k = 0,$$

(1) Dans ce qui suit, $\varphi_j, \psi_j, \delta_j, \ldots$ désignent des polynomes entiers en x, S, S', ..., $S^{(j)}$.

où φ_k, φ'_k sont de degrés $\leqq \lambda - 1$, γ'_k de degré $\leqq \lambda$ en x, S, S', ..., $S^{(k+1)}$, c'est-à-dire

$$S^{(k+2)}\varphi_k + \gamma_{k+1} = 0,$$

où γ_{k+1} ne contient que x, S, S', ..., $S^{(k+1)}$ et est de degré $\leqq \lambda$ par rapport à ces quantités. De même

$$S^{(k+4)}\varphi_k - 2S^{(k+3)}\varphi'_k + S^{(k+2)}\varphi''_k + \gamma''_{k+1} = 0;$$

mais γ'_{k+1} est de la forme $S^{(k+2)}\delta_{k+1} + \varepsilon_{k+1}$, γ''_{k+1} de la forme

$$S^{(k+3)}\delta_{k+1} + \varepsilon_{k+2};$$

donc

$$S^{(k+4)}\varphi_k + S^{(k+3)}\varphi_{k+1} + \gamma_{k+2} = 0,$$

où φ_{k+1} est de degré $\leqq \lambda - 1$, γ_{k+2} de degré $\leqq \lambda$.

Admettant en général que

$$(8) \qquad S^{(k+2n)}\varphi_k + S^{(k+2n-1)}\psi_{k+1} + \ldots + S^{(k+n+1)}\psi_{k+n-1} + \psi_{k+n} = 0,$$

on voit qu'une relation de même forme a lieu quand on remplace n par $n+1$ dans (8), parce que ψ''_{k+n} est de la forme

$$S^{(k+n+2)}\theta_{k+n} + \eta_{k+n+1}.$$

Il suffit, en effet, de prendre deux fois la dérivée des deux membres de (8).

Supposant dans (8) $k + 2n = p$, on a

$$S^{(p)}\varphi_k + S^{(p-1)}\psi_{k+1} + \ldots + S^{(p-l)}\psi_{k+l} + \chi_{p-l-1} = 0,$$

si

$$k + n + 1 \leqq p - l = k + 2n - l, \qquad \text{ou} \qquad n \geqq l + 1,$$

ce que j'admets; p étant alors fixe, ainsi que l, les degrés des polynomes φ_k, ψ_{k+1}, ..., ψ_{k+l} sont $\leqq \lambda - 1$, celui de $\chi_{p-l-1} \leqq \lambda$, les valeurs absolues des coefficients de ces polynomes sont limitées supérieurement en fonction de k et l.

Je prends q fois la dérivée des deux membres :

$$(9) \qquad S^{(p+q)}\varphi_k + S^{(p+q-1)}(C_q^1\varphi'_k + \psi_{k+1}) + \ldots + S^{(p+q-l)}(C_q^l\varphi_k^{(l)} + \ldots + \psi_{k+l}) + \chi_{p+q-l-1} = 0.$$

Dans cette formule, les coefficients de $S^{(p+q)}$, ..., $S^{(p+q-l)}$ ne s'annulent pas tous identiquement pour $x=0$, car $\varphi_\kappa^{(l)} = l!\,A'_l \neq 0$ pour $x=0$. (9) donnera donc, quand $x=0$, pour une valeur de α égale à o, 1, 2, ..., ou l,

$$(10)\qquad S_0^{(p+q-\alpha)}(b_0+b_1q+\ldots+b_\alpha q^\alpha)=G(S_0,\ \ldots,\ S_0^{(p+q-\alpha-1)}).$$

Dans cette formule, qui est très importante, et qui a été indiquée par M. Hurwitz (dans l'hypothèse, il est vrai, où les S_0, S'_0, ... sont rationnels, mais cette hypothèse ne sert au fond que dans la suite de ses raisonnements), les paramètres b_0, ..., b_α qui interviennent sont indépendants de q.

Les égalités (9) et (10) sont fécondes en conséquences; je vais, à ce sujet, distinguer plusieurs cas.

Premier cas. — *La série* S *a ses coefficients rationnels.*

C'est le cas considéré par MM. Gomes-Teixera et Hurwitz. S_0, S'_0, ... sont rationnels, et, d'après le lemme I, on peut supposer les paramètres de (2) [ou (5)] rationnels. Les numérateurs et les dénominateurs des quantités rationnelles b_0, b_1, ..., b_α indépendantes de q sont limités; G est un polynome en S_0, ..., $S_0^{(p+q-\alpha-1)}$ à coefficients rationnels, de degré $\leq \lambda$. Les dénominateurs de ces coefficients (mais non forcément les numérateurs) sont indépendants de q, car les dérivations successives ne peuvent augmenter les dénominateurs dans (8) et (9). En multipliant dès lors les deux membres de (10) par une quantité convenable b indépendante de q, et plus petit commun multiple de tous ces dénominateurs, on a

$$S_0^{(p+q-\alpha)}(c_0+c_1q+\ldots+c_\alpha q^\alpha)=b\,G(S_0,\ \ldots,\ S_0^{(p+q-\alpha-1)}),$$

où c_0, c_1, ..., c_α et tous les coefficients du deuxième membre sont entiers; dès que q est assez grand, la parenthèse du premier membre est toujours $\neq 0$.

C'est de cette égalité que M. Hurwitz déduit le théorème I énoncé plus haut. On remarquera que la démonstration ne supposant pas la convergence de S, ce théorème I est encore vrai pour les solutions divergentes.

On a, d'après (9),

$$(11)\quad \begin{aligned} &G(S_0, \ldots, S_0^{(p+q-\alpha-1)}) \\ &\quad = S_0^{(p+q-\alpha-1)} p_{\alpha+1} + \ldots + S_0^{(p+q-l)} p_l + \Gamma(S_0, \ldots, S_0^{(p+q-l-1)}) \quad (^1), \end{aligned}$$

où $p_{\alpha+1}, \ldots, p_l$, avec $\alpha+1 \leqq l$, sont des polynomes en q de degrés $\alpha+1, \ldots, l$, dont les coefficients ont leurs dénominateurs indépendants de q; quant à Γ, on remarque que $\chi_{p+q-l-1}$ est encore de degré $\leqq \lambda$ par rapport aux x, S, S′, ..., et aussi, comme on le vérifie de suite, de degré $\leqq \mu$ par rapport aux S, S′, ..., si f est de degré $\leqq \mu$ par rapport aux y, y', ... Γ est donc de degré $\leqq \mu$ par rapport aux S_0, S'_0, ...

Or,

$$S_0^{(n)} = a_n = \pm s_n t_n^{-1},$$

où s_n et t_n sont positifs et premiers entre eux; on pourra poser

$$s_n t_n^{-1} = P_n Q_n^{-1},$$

où P_n et Q_n sont les plus petits entiers tels que Q_{n-1} divise Q_n : c'est-à-dire que Q_n sera le plus petit commun multiple de $t_0, t_1, \ldots, t_n$. G sera donc la forme (²)

$$B_{p+q-\alpha} \nu^{-1} Q_{p+q-\alpha-1}^{-\mu},$$

(¹) Cette formule est encore vraie, bien entendu, lorsque les coefficients de f ne sont pas rationnels.

(²) On pourra arriver à une formule nettement plus avantageuse dans des cas étendus. D'après la formule (14) envisagée plus loin (p. 254), chaque terme de Γ a son dénominateur de la forme

$$D = \nu_1 t_0^{j_0} t_1^{j_1} \ldots t_{k_1}^{j_{k_1}},$$

avec

$$j_0 + j_1 + \ldots + j_{k_1} \leqq \mu, \quad j_{k_1} \geqq 1, \quad j_0 + 2j_1 + \ldots + (k_1+1) j_{k_1} \geqq M + q, \quad p = k + 2l + 2.$$

Donc il en résulte, quand $k_1 + 1 > \dfrac{M+q}{2}$, $j_{k_1} = 1$.

Je suppose que chaque denominateur Q_n soit divisible par Q_{n-1}^2 : D divise $\nu_1 Q_{k_1}^{\mu}$, qui divise $\nu_1 Q_{p+q-\alpha-1}$ dès que $p + q - \alpha - 1 - k_1$ est au moins égal à μ. Quand cette différence est $< \mu$, $j_{k_1} = 1$: alors, parmi les quantités $j_{k_1-1}, j_{k_1-2}, \ldots$, la première, qui peut être $\neq 0$, a son indice limité indépendamment de q, et le produit correspondant $t_{j_0}^{0} \ldots t_{k-1}^{j_{k-1}}$ est limité supérieurement, quel que soit q : le nombre de ces produits distincts est limité. Finalement, le dénominateur D est de la forme $\nu_2 Q_{p+q-\alpha-1}$, et G de la forme $B\nu^{-1} Q_{p+q-\alpha-1}^{-1}$. Dans ce cas on trouve, pour $P_m \neq 0$, au lieu de (12),

$$s_m t_m^{-1} \geqq (\nu D_m Q_{m-1})^{-1}.$$

où $B_{p+q-\alpha}$ est entier, et ν un entier indépendant de q. Finalement,

$$S_0^{p+q-\alpha} = b B_{p-q-\alpha} \nu^{-1} Q_{p+q-\alpha-1}^{-\mu} (c_0 - c_1 q + \ldots - c_\alpha q^\alpha)^{-1}.$$

On déduirait rapidement de là le théorème I précité; le lecteur pourra le faire, ou se reporter au Mémoire de M. Hurwitz [1]; je préfère observer ce qui suit : je pose d'abord $p + q - \alpha = m$, d'où

$$c_0 + c_1 q + \ldots + c_\alpha q^\alpha = d_0 + d_1 m + \ldots + d_\alpha m^\alpha = D_m,$$
$$a_m = S_0^m = \pm P_m Q_m^{-1} = \pm s_m t_m^{-1} = b B_m \nu^{-1} Q_{m-1}^{-\mu} D_m^{-1};$$

si $a_m \neq 0$,

$$(12) \qquad s_m t_m^{-1} \geqq (\nu D_m Q_{m-1}^{\mu})^{-1}.$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit* $F(x) = \sum_0^\infty \pm s_m t_m (m!)^{-1} x^m$ *une série déterminée à coefficients rationnels* (s_m, t_m *entiers positifs premiers entre eux*), *solution formelle d'une équation différentielle rationnelle déterminée en* x, y, y', ..., $y^{(k)}$ *d'ordre* k *et de degré* $\leqq \mu$ *par rapport à* y, y', ..., $y^{(k)}$. *Il existe une constante* ν *et un polynome* D_m *à coefficients entiers indépendants de* m *tels que, à partir d'une certaine valeur de* m, *on ait, quand* $s_m \neq 0$,

$$(12) \qquad s_m t_m^{-1} \geqq (\nu D_m Q_{m-1}^{\mu})^{-1},$$

Q_{m-1} *étant le plus grand commun diviseur de* t_0, t_1, ..., t_{m-1}.

Si, dans une série à coefficients rationnels de la forme F, *convergente ou divergente, il y a une infinité de coefficients ne satisfaisant à aucune condition de cette nature, cette série est une fonction hypertranscendante* [2].

Il n'est pas difficile de former de pareilles séries : on prendra par exemple $0 < |s_m| \leqq \sigma$ pour une infinité de valeurs de m, $Q_m = t_m$,

---

[1] *Annales de l'École Normale*, 1889, p. 330.

[2] Les conclusions restent les mêmes pour les séries et les équations différentielles à coefficients imaginaires : on pourra toujours supposer les t_m réels, et alors, dans (12), $s_m t_m^{-1}$ est le module de a_m.

$t_m > t_{m-1}^{\lambda_{m-1}}$, où σ est fixe et λ_{m-1} un entier qui croît constamment et indéfiniment avec m. On a, si $t_{\nu_1} > 2$, $\lambda_{\nu_1} > 2$, $\lambda_{m-1} \geqq \mu + 1$, $s_m \neq 0$,

$$\begin{aligned} t_m &> t_{m-1}^{\mu}\, t_{m-1}^{\lambda_{m-1}-\mu} \geqq t_{m-1}^{\mu}\, t_{m-1}, \\ t_{m-1} &> t_{m-2}^{\lambda_{m-2}} > t_{m-3}^{\lambda_{m-3}\lambda_{m-2}} > \ldots > t_{\nu_1}^{\lambda_{m-2}\ldots\lambda_{\nu_1}} > 2^{2^{m-\nu_1-1}}, \\ t_m &> t_{m-1}^{\mu}\, 2^{2^{m-\nu_1-1}} > \sigma\nu\, D_m Q_{m-1}^{\mu}, \end{aligned}$$

pour toute valeur de σ, ν, μ, D_m, dès que m est assez grand. Donc :

Les séries infinies à coefficients rationnels

$$F_1(x) = \sum_1^{\infty} \pm s_m\, t_m (m!)^{-1} x^m,$$

où $t_m > t_{m-1}^{\lambda_{m-1}}$, λ_m *étant un entier qui croît indéfiniment avec* m *et* t_{m-1} *divisant* t_m, *sont des fonctions hypertranscendantes quand* $0 < |s_m| < \sigma$ (σ *nombre fixe*) *pour une infinité de valeurs de* m (s_m, t_m *entiers*, t_m *réel*).

Le théorème II ci-dessus a des analogies avec le théorème de Liouville (Chap. II) et il conduit à une conséquence bien curieuse au point de vue de la théorie des nombres transcendants; dans des cas étendus ([1]), $F(p'q'^{-1})$ est un nombre transcendant de Liouville quand $p'q'^{-1}$ est rationnel $\neq 0$. Ainsi les nombres $F_1(p'q'^{-1})$ sont des nombres transcendants de Liouville (Chap. V, p. 103); $F_1(x)$ est une fonction génératrice de nombres transcendants (Chap. V). On pourrait appeler ces nombres des *nombres hypertranscendants*, s'il devenait nécessaire de donner un nom spécial aux nombres déduits d'une fonction génératrice hypertranscendante.

Deuxième cas. — *La série* S *a des coefficients quelconques et présente des lacunes.*

Je suppose que la série S, convergente ou divergente, présente des lacunes, c'est-à-dire des suites de coefficients consécutifs a_n, a_{n+1}, ...

([1]) En vue de leur détermination on pourra se reporter à mon Mémoire *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants* (*Journ. de Math.*, 1904, p. 300, théorème II).

Le théorème III peut servir de base pour les fonctions hypertranscendantes à une théorie en partie analogue à celle que j'ai développée dans le Chapitre III pour les nombres transcendants de Liouville.

Je choisis une fonction hypertranscendante

$$F = \sum_0^\infty b_m x^{\beta_m},$$

où les β_m sont des entiers croissants ($\beta_{m+1} > \beta_m$) jouissant de la propriété suivante : pour une infinité de valeurs m_1 de m, on a, dès que m_1 est assez grand,

$$(16) \qquad \beta_{m_1+1}\beta_{m_1}^{-1} > \alpha',$$

α' étant un nombre fixe arbitraire aussi grand qu'on veut ([1]). Je considère la série hypertranscendante analogue

$$F_1 = \sum_0^\infty c_{m'} x^{\gamma_{m'}}$$

telle que, pour une infinité de valeurs m_2 de m' correspondant à m_1,

$$\gamma_{m'+1} > \gamma_{m'}, \qquad \gamma_{m_2} = l_{m_1}\beta_{m_1}, \qquad \gamma_{m_2+1} = l_{m_1+1}\beta_{m_1+1},$$

où l_{m_1}, l_{m_1+1} sont limités supérieurement et inférieurement; $\gamma_{m_2+1}\gamma_{m_2}^{-1}$ est $> \alpha'_1$, α'_1 étant un nombre fixe arbitraire, dès que m_2 est assez grand. Je dirai que F_1, qui est une fonction hypertranscendante, est une *fonction hypertranscendante correspondant à* F; il est évident que, réciproquement, F correspond à F_1.

On pourra encore considérer l'ensemble des fonctions correspondant à F; soit F_2 une fonction $\neq F_1$ et correspondant à F;

$$F_2 = \sum_0^\infty d_{m''} x^{\delta_{m''}};$$

on a

$$\delta_{m_3} = l'_{m_1}\beta_{m_1}, \qquad \delta_{m_3+1} = l'_{m_1+1}\beta_{m_1+1},$$
$$\delta_{m_3} = l''_{m_1}\gamma_{m_2}, \qquad \delta_{m_3+1} = l''_{m_1+1}\gamma_{m_2+1},$$

où l'_{m_1}, l''_{m_1}, l'_{m_1+1}, l''_{m_1+1} sont limités supérieurement et inférieurement quel que soit m_1 [m_1 satisfaisant à (16)]. Donc :

([1]) Dès lors, il y a une infinité de valeurs m_1 de m telles que $\beta_{m_1+1}\beta_{m_1}^{-1}$ soit un nombre croissant constamment et indéfiniment avec m_1.

Deux fonctions hypertranscendantes correspondant à F *se correspondent entre elles.*

La somme, par suite la différence de deux fonctions F_1, F_2 correspondant à F, est une fonction correspondant à F ou un polynome. En effet, soit, par exemple, $\delta_{m_3} \geqq \gamma_{m_2}$; $F_1 + F_2$, ordonné suivant les puissances croissantes de x, contient un terme en $x^{\delta_{m_3}}$; le terme qui suit a son exposant au moins égal, soit à γ_{m_2+1}, soit à δ_{m_3+1}, et $\gamma_{m_2+1}\delta_{m_3}^{-1}$, $\delta_{m_3+1}\delta_{m_3}^{-1}$ sont $> \alpha'_2$, si grand que soit le nombre fixe arbitraire α'_2, pour une infinité de valeurs de m_1. Toutefois, comme cas particulier, $F_1 + F_2$ pourra être un polynome.

Le produit $F_1 F_2$ est aussi une fonction hypertranscendante correspondant à F. Il contient en effet les termes

$$c_{m_2} d_{m_3} x^{\gamma_{m_2} + \delta_{m_3}}, \quad c_0 d_{m_3+1} x^{\delta_{m_3+1} + \gamma_0}, \quad c_{m_2+1} d_0 x^{\gamma_{m_2+1} + \delta_0},$$

tous les termes étant d'exposants supérieurs ou inférieurs. Or

$$\delta_{m_3+1}(\gamma_{m_2} + \delta_{m_3})^{-1}, \quad \gamma_{m_2+1}(\gamma_{m_2} + \delta_{m_3})^{-1}$$

sont $> \alpha'_3$, si grand que soit le nombre fixe arbitraire α'_3, pour une infinité de valeurs de m_1.

On remarquera d'ailleurs que les dérivées successives de F, F_1, F_2, ... sont aussi des fonctions correspondant à F. De même le produit de F par un polynome est une fonction hypertranscendante qui correspond à F. Donc :

Théorème IV. — *L'ensemble* E *des séries hypertranscendantes correspondant à la série* F *et des polynomes forme un groupe par rapport à l'addition, la soustraction, la multiplication* (¹) *et la*

(¹) Il resterait à examiner ici si l'on ne peut obtenir une propriété semblable pour la division en considérant au besoin un ensemble contenant E. Cette question sera traitée plus loin par d'autres méthodes.

On remarquera que l'on peut indifféremment supposer que l'ensemble E ne comprend que des séries toutes convergentes ou qu'il renferme des séries divergentes; la croissance des coefficients de chaque série ne joue en principe aucun rôle. On peut lui en faire jouer un en spécifiant des conditions complémentaires, par exemple :

1° Toutes les séries F ont un rayon de convergence $\geqq \rho'$ (ρ' nombre fixe);

2° Toutes les séries F sont des fonctions entières d'ordre fini $\leqq \rho'$;

3° Toutes les séries F sont des fonctions entières d'ordre $\leqq (k', \rho')$, etc.

Dans chaque cas, on obtient des ensembles E' analogues à E, contenus dans E, et jouissant des mêmes propriétés.

dérivation. Tout polynome formé avec ces séries et leurs dérivées appartient à l'ensemble E.

Troisième cas. — *La série* S *est divergente et ses coefficients croissent suffisamment vite.*

Soit une série $S = \sum_0^\infty a_m (m!)^{-1} x^m$ divergente qui satisfait formellement à $f = 0$. Comme on l'a déjà indiqué, il résulte du théorème connu de Cauchy sur l'existence des solutions des équations différentielles que $f'_{y^{(k)}}$ s'annule quand on y fait $x = 0, y = a_0, y_1 = a_1, \ldots, y^{(k)} = a_k$. Mais l'on peut supposer, comme on l'a vu, que $f'_{y^{(k)}}$ n'est pas nul identiquement quand on remplace y par S.

L'égalité (9) permet d'obtenir une limite supérieure de la croissance des modules des coefficients a_m. Pour cela, on reprendra l'équation (10); dès que q est assez grand, $b_0 + b_1 q + \ldots + b_\alpha q^\alpha$ est $\neq 0$. D'après (11)

$$S_0^{(p+q-\alpha-1)} p_{\alpha+1} + \ldots + S_0^{(p+q-l)} p_l \leqq \lambda_1 q^l \sigma_{p+q-\alpha-1},$$

où λ_1 est une constante indépendante de q et $\sigma_{p+q-\alpha-1}$ le plus grand module des quantités $S_0^{(m_1)} = a_{m_1}$, avec $m_1 \leqq p + q - \alpha - 1$. Quant à $\Gamma(S_0, \ldots, S_0^{(p+q-l-1)})$, c'est $\chi_{p+q-l-1}$ où l'on fait $x = 0$; $\chi_{p+q-l-1}$ est une somme de termes de la forme (14). Soit δ le nombre des termes de f, tous de la forme (13); je vais trouver une limite supérieure du nombre des termes (14) pour lesquels $\beta_1 = 0$; il est inutile de compter ceux pour lesquels $\beta_1 > 0$; ils sont tous nuls dans Γ. Pour obtenir ces termes (14), on dérive d'abord chaque terme (13) α_1 fois par rapport à x, de façon à faire disparaître le facteur x, puis $\rho - \alpha_1 = q + 2l + 2 - \alpha_1$ fois, et l'on déduit de chaque terme (13) au plus (¹) μ^ρ termes (14), c'est-à-dire que $\chi_{p+q-l-1}$ contient au plus $\delta\mu^\rho$ termes distincts qui ne s'annulent pas pour $x = 0$; chacun d'eux a son module $\leqq \lambda_2 \sigma^\mu_{p+q-l-1}$, où λ_2 est une constante indépendante de q. Le module de $\Gamma(S_0, \ldots, S_0^{(p+q-l-1)})$ est ainsi au plus

(¹) On considère la dérivée $\alpha_1! A y^{i_0} y'^{i_1} \ldots y^{(k)i_k}$ de (13) comme un produit formé de $\alpha_1! A$ et de i_0 facteurs y, ..., i_k facteurs $y^{(k)}$; la dérivée première de ce produit est une somme de $i_0 + \ldots + i_k \leq \mu$ termes $\alpha! A y^{i_0} y'^{i_1} \ldots y^{(k)i_k}$, la dérivée seconde contient au plus μ^2 termes analogues, etc.

égal à

$$\delta\gamma_2\,\mu^{q+2l+2}\,\sigma^{\mu}_{p+q-l-1};$$

on en conclut, d'après (10) et (11),

$$|a_{p+q-\alpha}| \leqq \lambda_1 q^l \sigma_{p+q-\alpha-1} + \delta\lambda_2\,\mu^{q+2l+2}\,\sigma^{\mu}_{p+q-l-1}.$$

Posant $p+q-\alpha = m$ et remarquant que ([1]), si $\mu > 1$,

$$\lambda_1 q^l \sigma_{p+q-\alpha-1} \leqq \frac{1}{2}\lambda_3\,\mu^m\,\sigma^{\mu}_{m-1},$$
$$\delta\lambda_2\,\mu^{q+2l+2}\,\sigma^{\mu}_{p+q-l-1} \leqq \frac{1}{2}\lambda_3\,\mu^m\,\sigma^{\mu}_{m-1},$$

λ_3 étant une constante indépendante de m, on obtient

$$|a_m| \leqq \lambda_3\,\mu^m\,\sigma^{\mu}_{m-1} \leqq \mu^{m+\zeta}\,\sigma^{\mu}_{m-1} \qquad (\mu > 1),$$
$$\sigma_m \leqq \mu^{m+\zeta}\,\sigma^{\mu}_{m-1},$$

où $\zeta > 0$ est indépendant de m; si θ est une constante convenable > 1, on en tire

$$\sigma_m \leqq \theta^{(\mu+\varepsilon)^m} \qquad (\varepsilon \text{ arbitraire} > 0),$$

car il suffit

$$\sigma_m \leqq \mu^{m+\zeta}(\theta^{(\mu+\varepsilon)^{m-1}})^{\mu} = \mu^{m+\zeta}\theta^{(\mu+\varepsilon)^m \mu(\mu+\varepsilon)^{-1}} \leqq \theta^{(\mu+\varepsilon)^m},$$
$$(\mu+\varepsilon)^m \quad \log\theta \geqq (m+\zeta)\log\mu + \mu(\mu+\varepsilon)^{m-1}\log\theta,$$
$$(\mu+\varepsilon)^{m-1}\varepsilon\log\theta \geqq (m+\zeta)\log\mu,$$

ce qui a lieu quel que soit m, si ε et θ est assez grand. Donc :

Théorème V. — *Soit une série divergente donnée* $\sum_0^\infty a_m(m!)^{-1}x^m$ *à coefficients quelconques, solution formelle d'une équation différentielle rationnelle donnée* $f = 0$ *d'ordre* k *et de degré* $\leqq \mu$ *en* $y, y', \ldots, y^{(k)}$; ε *étant une constante arbitraire* > 0, *on peut*

([1]) Ce qui suit suppose $\mu > 1$; lorsque $\mu = 1$ (équations différentielles linéaires), on a $\sigma_m \sigma^{-1}_{m-1} \leqq m^{\theta_1}$, où θ_1 est fini; on en conclut

$$|a_m| \leqq A'(m!)^{\theta_1},$$

où A' est une constante.

trouver une constante positive $\theta > 1$ *telle que*

$$|a_m| \leqq \theta^{(\mu+\varepsilon)^m} \text{ [1]},$$

quand $\mu > 1$; *lorsque* $\mu = 1$ (*équations différentielles linéaires*), *on a*

$$|a_m| \leqq A'(m!)^{\theta_1} \qquad (A',\ \theta_1 \text{ constantes}).$$

On voit que, si la croissance des $|a_m|$ est assez rapide, plus exactement s'il y a une infinité de valeurs de m telles que

$$|a_m| > 2^{\varphi_m^m},$$

où $\lim \varphi_m = +\infty$ pour $n = \infty$, la série en question ne pourra satisfaire formellement à aucune équation différentielle rationnelle; car

$$\theta^{(\mu+\varepsilon)^m} < 2^{\varphi_m^m},$$

puisque

$$(\mu + \varepsilon)^m \log\theta < \varphi_m^m \log 2$$

dès que m est assez grand.

Voici encore une autre conséquence de la formule (10) : je considère une infinité de solutions distinctes de $f = 0$, analogues à S, mais ne satisfaisant pas à $f'_{y^{(k)}} = 0$ et je suppose pour elles l limité supérieurement et $\leqq l_1$, en admettant que cela soit possible. La formule (10) détermine $S_0^{(m)}$ en fonction de $S_0, S'_0, \ldots, S_0^{(\lambda_1)}$, où λ_1 est limité en fonction de l_1 et des coefficients de $f = 0$. Par conséquent, deux de ces solutions ne peuvent avoir mêmes valeurs de S_0, $S'_0, \ldots, S_0^{(\lambda_1)}$; autrement dit, le développement de Maclaurin qui représente la différence de deux de ces solutions qui sont distinctes ne peut être, pour x infiniment petit, d'ordre supérieur [2] à x^{λ_1}.

---

[1] On pourrait sans doute améliorer cette limite en tenant compte de (15) et de la note [2], page 251. *Comparer* avec mon Mémoire des *Annales de l'École normale supérieure*, 1903. p. 488-497.

[2] On suppose que toutes les solutions considérées soient des séries de Maclaurin $\sum_0^\infty e_n x^n$, convergentes ou divergentes, ou des polynomes.

Pour plus de commodité, je dirai que la série de Maclaurin $\sum_0^\infty e_n x^n$ est d'ordre infinitésimal égal à celui de x^n pour x infiniment petit, *même si cette série diverge quel que soit* x, quand le premier coefficient $\neq 0$ dans la série est e_n.

Ceci posé, soit une infinité de solutions (s'il y en a), $\sum_1, \ldots, \sum_n, \ldots$ pour lesquelles l n'est pas limité et qui tendent vers une limite commune $\sum$, l croissant indéfiniment avec n. Je conviens de dire par là que $\sum = \sum_n + \varepsilon_n$, l'ordre infinitésimal de ε_n pour x infiniment petit croissant indéfiniment avec n. Je substitue $\sum_n + \varepsilon_n = \sum$ à la place de y dans $f'_{y^{(k)}}$; l'ordre infinitésimal du résultat pour x infiniment petit est supérieur à tout nombre arbitraire, quand n est assez grand, puisque l est alors aussi grand qu'on veut, c'est-à-dire que $\sum$ est solution de $f'_{y^{(k)}} = 0$. Par conséquent :

Lemme II. — *Quand une solution formelle $\sum$ de l'équation différentielle rationnelle $f = 0$, d'ordre k, ne satisfaisant pas à $f'_{y^{(k)}} = 0$, est la limite d'une suite indéfinie de fonctions $\sum_1$, $\sum_2, \ldots, \sum_n, \ldots$ ne satisfaisant pas à $f'_{y^{(k)}} = 0$, de façon que l'ordre infinitésimal de $\sum - \sum_n$ pour x infiniment petit croisse indéfiniment avec n, parmi les fonctions $\sum_n$ il n'y en a qu'un nombre limité* (¹) *qui puissent satisfaire à l'équation $f = 0$.*

On suppose que $\sum, \sum_1, \ldots, \sum_n, \ldots$ sont des polynomes ou des séries de Maclaurin convergentes ou divergentes $\sum_0^\infty c_n x^n$.

Ce lemme est utilisé plus loin.

(¹) Si en effet une infinité des fonctions $\sum_n$ satisfaisait à $f = 0$, on pourrait trouver n_1 et n_2 assez grands pour que $\sum_{n_1} - \sum_{n_2} = \left(\sum - \sum_{n_2}\right) - \left(\sum - \sum_{n_1}\right)$ soit d'ordre infinitésimal aussi grand qu'on veut pour x infiniment petit, $\sum_{n_1}$ et $\sum_{n_2}$ étant solutions de $f = 0$. D'après ce qui précède, la quantité l ne peut être limitée pour ces fonctions. Il en résulterait que $\sum$ serait une solution de $f'_{y^{(k)}} = 0$, contrairement à l'hypothèse.

Autre méthode.

Les méthodes ci-dessus s'appliquent commodément aux solutions des équations différentielles rationnelles pour trouver certaines lois relatives aux lacunes, ou encore à la croissance des coefficients ou des dénominateurs des coefficients supposés rationnels, quand ces solutions sont développées suivant la formule de Maclaurin. Mais elles semblent d'application difficile lorsque les solutions sont données comme limites de fractions rationnelles, par exemple comme quotients de deux séries ou sous forme de fractions continues algébriques. Je vais indiquer ci-dessous *une autre méthode qui conduit à des propriétés paraissant en liaison tout à fait intime avec le théorème fondamental de Liouville pour les nombres transcendants* (Chap. II).

Incidemment je ferai connaître quelques résultats accessoires sur les fonctions algébriques et les solutions des équations différentielles linéaires.

Fonctions algébriques. — Soit l'équation algébrique

$$f_1(x,y) = 0. \tag{17}$$

On peut l'écrire

$$P_0(x) + y\,P_1(x) + y^2 P_2(x) + \ldots + y^{\varpi} P_{\varpi}(x) = 0,$$

où P_0, P_1, ..., P_{ϖ} sont des polynomes de degrés $\leqq p_0, p_1, \ldots, p_{\varpi}$. On peut d'ailleurs supposer $P_0(x) \neq 0$. Si alors une série

$$y = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots \qquad (a_m \neq 0),$$

est solution de (17), on voit que

$$y\,P_1(x) + y^2 P_2(x) + \ldots + y^{\varpi} P_{\varpi}(x)$$

doit avoir un terme en x de degré $\leqq p_0$, après substitution de la série y; il en résulte donc

$$m \leqq p_0.$$

Lemme III. — *Toute série*

$$y = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \ldots \qquad (a_m \neq 0),$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de x et satisfaisant à (17) est telle que le degré m de la plus petite puissance de x de coefficient $a_m \neq 0$ dans cette série ne dépasse le degré du polynome en x indépendant de y qui figure dans (17).

Équations différentielles linéaires. — La marche suivie pour établir les théorèmes I et II permet de montrer que, si une série de Maclaurin $y = \sum_m^\infty a_n x^n$, $(m > 0)$, donnée satisfait à une équation différentielle linéaire donnée

$$(18) \qquad f = \beta_0 y + \beta_1 y' + \ldots + \beta_k y^{(k)} + \beta_{k+1} = 0,$$

où les β_i sont des polynomes en x de degré $\leqq \lambda$, l'indice m du premier coefficient de la série qui est $\neq 0$ est limité en fonction de k et du degré λ ou, plus exactement, du degré λ' de β_k. Ici, en effet, $f'_{y^{(k)}} = \beta_k$. Mais, en vue d'arriver à plus de précision, j'établirai directement le lemme suivant :

Lemme IV [1]. — *Toute série de Maclaurin $y = \sum_0^\infty a_n x^n$ qui satisfait formellement à l'équation différentielle linéaire*

$$\beta_0 y + \beta_1 y' + \ldots + \beta_k y^{(k)} + \beta_{k+1} = 0,$$

dont les coefficients sont des polynomes de degré $\leqq q$, a pour indice m de son premier terme $\neq 0$ un nombre $\leqq q + c$, où c ne dépend que de k et des coefficients des polynomes.

En effet, la substitution de y dans le premier membre de l'équation différentielle donnera un résultat identiquement nul

$$B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m + \ldots = 0,$$

[1] Ce lemme s'applique même si y n'est qu'une solution formelle divergente, ou si le coefficient de $y^{(k)}$ est nul pour $x = 0$.

et

$$B_0 = 0, \quad B_1 = 0, \quad \ldots, \quad B_m = 0, \quad \ldots;$$

le coefficient a_n figurera au plus, puisque

$$y^{(k)} = k!\, a_k + (k+1)!\, a_{k+1}x + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)\, a_n x^{n-k} + \ldots,$$

dans

$$B_{n-k}, \quad B_{n-k+1}, \quad \ldots, \quad B_{n+q}.$$

Si

$$\begin{aligned} \beta_0 &= c_0^{(0)} + c_1^{(0)} x + \ldots + c_q^{(0)} x^q, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_{k+1} &= c_0^{(k+1)} + c_1^{(k+1)} x + \ldots + c_q^{(k+1)} x^q, \end{aligned}$$

le coefficient de x^n est (avec $a_i = 0$ pour $i < 0$, $c_n^{(k+1)} = 0$ pour $n > q$) :

$$\begin{aligned} B_n = {} & c_0^{(0)} a_n + c_1^{(0)} a_{n-1} + \ldots + c_q^{(0)} a_{n-q} \\ & + c_0^{(1)} (n+1)\, a_{n+1} + \ldots + c_q^{(1)} (n-q+1) a_{n-q+1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + c_0^{(k)} (n+k)\ldots(n+1)\, a_{n+k} + \ldots + c_q^{(k)} (n+k-q)\ldots(n+1-q)\, a_{n+k-q} \\ & + c_n^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Dès que $n \geqq q+1$, B_{n+1} se déduit de B_n par le simple changement de n en $n+1$.

Pour une valeur de n, soit a_{n+l} ($l \leqq k$) le coefficient d'indice le plus élevé de B_n tel qu'un au moins des coefficients $c_i^{(j)}$ qui le multiplient dans B_n soit différent de 0. B_n est de la forme

$$\varpi_{n+l}\, a_{n+l} + \varpi_{n+l-1}\, a_{n+l-1} + \ldots = 0,$$

où

$$\varpi_{n+l} = \chi_\lambda + \chi_{\lambda-1} + \ldots;$$

χ_λ, $\chi_{\lambda-1}$, ... sont des polynomes en $n+l$ de degrés λ, $\lambda-1$, ..., avec $\lambda \leqq k$, de la forme

$$\chi_{\lambda'} = A_{\lambda'}(n+l)(n+l-1)\ldots(n+l-\lambda'+1).$$

D'après la façon dont on a choisi a_{n+l}, l'on peut supposer $A_\lambda \neq 0$. Alors ϖ_{n+l} est un polynome en $n+l$, de degré effectif λ, non identiquement nul, et qui s'annule pour au plus λ valeurs de $n+l$. Ces

valeurs ont leurs modules limités ([1]) en fonction des coefficients $c_i^{(j)}$ et de k (q n'intervient pas).

Donc, lorsque $n+l$ est supérieur à une certaine limite $\nu - 1$, où ν ne dépend pas de q, $B_n = 0$ détermine a_{n+l}, en fonction des coefficients d'indice plus petit par une équation linéaire homogène qui est une formule de récurrence. Les coefficients a_ν, $a_{\nu+1}$, ..., $a_{\nu+k+q}$ ne peuvent être tous nuls, sans quoi $B_n = 0$, qui ne contient que $k+q+1$ coefficients au plus, montre qu'il en serait de même de tous les a_m. Dès lors, un des coefficients a_m, avec

$$m \leqq \nu + k + q = q + c,$$

est $\neq 0$. C. Q. F. D.

Je vais déduire de là le lemme suivant :

Lemme V. — *Soit l'expression (notations du lemme* IV)

$$E(y) = \beta_0 y + \ldots + \beta_k y^{(k)} + \beta_{k+1};$$

si l'on substitue à y une série (convergente ou divergente) de la forme

$$y = a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \ldots;$$

avec $a_r \neq 0$, r entier, $E(y)$ devient une série

$$B_{s+1} x^{s+1} + B_{s+2} x^{s+2} + \ldots;$$

quand $r \geqq q + 2 + k + \lambda_1 \alpha$, on a

$$E(y) \neq 0, \qquad s + 1 \leqq r + q.$$

En effet, le résultat de la substitution est de la forme

$$B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m + \ldots.$$

Soit $B_0 = B_1 = \ldots = B_s = 0$, et a_{m+l} le coefficient de y d'indice le plus élevé contenu effectivement dans B_m, avec $-q \leqq l \leqq k$; on a

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{r-1} = 0,$$

([1]) On voit (Niewenglowski, *Algèbre de Math. spéc.*, t. II, 2e édition, Paris, A. Colin, 1891, p. 418) que ces valeurs sont au plus égales à $1 + \lambda_1 \alpha$, α étant le maximum du module du rapport de deux coefficients $c_i^{(j)}$ et λ_1 étant limité en fonction de k : $A_{\chi'}$ est, en effet, un des coefficients $c_i^{(j)}$. On prendra $\nu = 2 + \lambda_1 \alpha$.

et, d'après le raisonnement du lemme précédent,

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{s+l} = 0,$$

pourvu que [note (¹), p. 265] $s+l \geqq q+k+2+\lambda_1\alpha$, $r \geqq q+k+2+\lambda_1\alpha$; alors, puisque $a_r \neq 0$, $s+l \leqq r-1$,

$$s \leqq r+q-1, \qquad s+1 \leqq r+q,$$

inégalité qui a encore lieu quand $r \geqq q+k+2+\lambda_1\alpha > s+l$.

C. Q. F. D.

Je vais maintenant établir le théorème annoncé, tout à fait analogue au théorème arithmétique de Liouville (Chap. II).

Théorème fondamental VI. — *Soit $\xi(x)$ une fonction non rationnelle donnée, quotient de deux séries de Maclaurin* [1]

$$\xi = \left(\sum_0^\infty c_m x^m\right)\left(\sum_0^\infty d_m x^m\right)^{-1},$$

$$(19) \qquad I_1 = P_1 Q_1^{-1}, \quad \ldots, \quad I_n = P_n Q_n^{-1}, \quad \ldots$$

des fractions rationnelles, fonctions réelles ou imaginaires de x, en nombre infini, ayant des valeurs distinctes; par hypothèse, $\xi - I_n$ est, pour x infiniment petit, un infiniment petit d'ordre [2] *α_n toujours croissant avec n, et les P_n, Q_n sont des polynomes en x de degrés respectifs p_n, q_n, dont l'un au moins croît indéfiniment avec n.*

Lorsque ξ est solution d'une équation différentielle rationnelle déterminée

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0$$

d'ordre k, sans satisfaire à une équation différentielle rationnelle d'ordre k et de degré moindre en $y^{(k)}$, ou d'ordre moindre que k, l'on a, dès que n est assez grand,

$$(20) \qquad |\xi - I_n| > |x|^{\lambda(1+p_n+q_n)},$$

(¹) Les séries sont convergentes ou divergentes; une d'elles peut se réduire à un polynome.

(²) Ceci veut dire que $\xi - I_n$ est égal formellement à une série de Maclaurin dont le terme de degré le moins élevé est en x^{α_n} : une remarque analogue s'applique à (20).

pour x infiniment petit (λ' est positif et ne dépend que de k et des paramètres de f).

Soit d_ω le premier des coefficients du dénominateur de ξ qui est $\neq 0$: $\xi x^\omega - I_n x^\omega$ est, pour x infiniment petit, d'ordre $\alpha_n - \omega$, et ξx^ω limite des fractions $I_n x^\omega$: de plus, ξx^ω est, en même temps que ξ, solution d'une équation différentielle d'ordre k de même degré en $y^{(k)}$, sans satisfaire à une équation différentielle d'ordre $< k$, ou d'ordre k et de degré plus petit en $y^{(k)}$. Il suffit alors de raisonner sur ξx^ω, c'est-à-dire que je puis supposer $d_0 \neq 0$ dans ξ.

Ceci posé, soit

$$\xi = y = I_n + h_n, \qquad \xi' = y' = I'_n + h'_n, \qquad \ldots, \qquad \xi^{(k)} = y^{(k)} = I_n^{(k)} + h_n^{(k)}.$$

On a, par la formule de Taylor pour les polynomes,

$$(21) \qquad \begin{aligned} & f(x, I_n + h_n, \ldots, I_n^{(k)} + h_n^{(k)}) - f(x, I_n, \ldots, I_n^{(k)}) \\ & = -f(x, I_n, \ldots, I_n^{(k)}) \\ & = h_n f'_{I_n} + \ldots + h_n^{(k)} f'_{I_n^{(k)}} + \ldots; \end{aligned}$$

p_n et q_n étant les degrés du numérateur et du dénominateur de I_n, les degrés du numérateur et du dénominateur de I'_n, I''_n, ..., $I_n^{(k)}$ ne dépassent pas respectivement

$$\begin{array}{lll} p_n + q_n & \text{et} & 2q_n, \\ p_n + 3q_n & \text{et} & 4q_n, \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ p_n + (2^k - 1)q_n & \text{et} & 2^k q^n. \end{array}$$

1° Soit d'abord

$$f(x, I_n, \ldots, I_n^{(k)}) \neq 0$$

pour une infinité de valeurs de n que je considère : c'est une fonction rationnelle dont l'ordre infinitésimal est au plus égal au maximum du degré du numérateur. Si

$$f = \sum A\, x^i y^{i_0} y'^{i_1} \ldots y^{(k)^{i_k}},$$

ce degré est au plus égal à une expression de la forme

$$(22) \qquad \lambda'' + \mu'' p_n + \nu'' q_n \leqq \lambda'(1 + p_n + q_n),$$

où λ'', μ'', ν'', λ' sont limités en fonction de k et des ι, i_0, i_1, ..., i_k.

Dans le dernier membre de (21), tous les termes ne peuvent être nuls identiquement ψ (¹); sinon, en effet, on aurait $f(x, \mathrm{I}_n, \ldots, \mathrm{I}_n^{(k)}) = 0$, contrairement à l'hypothèse. Dès lors, le dernier membre de (21) peut se mettre sous la forme d'une fraction

$$\mathrm{N}_n^{-1}(ah_n + a_1 h'_n + \ldots + a_n h_n^{(k)} + b_1 h_n^2 + \ldots),$$

où a, a_1, ..., a_n, b_1, ... sont des polynomes en x, le numérateur ne contenant aucun terme indépendant des h_n, h'_n, ..., $h_n^{(k)}$, et le dénominateur N_n étant un polynome indépendant de ces quantités, dénominateur commun de f'_{I_n}, ..., $f_{\mathrm{I}_n^{(k)}}$, ... Ces dernières expressions sont elles-mêmes des polynomes dont les dénominateurs sont de degré $\leqq \lambda_1 + \nu_1 q_n$, où λ_1, ν_1 sont limités en fonction de k et des exposants de f; le dénominateur commun est donc de degré $\leqq \lambda_2 + \nu_2 q_n$, où λ_2, ν_2 sont limités de même. Si alors h_n est de l'ordre de x^{α_n} pour x infiniment petit, $h_n^{(k)}$ est de l'ordre de $x^{\alpha_n - k}$, c'est-à-dire d'ordre $\alpha_n - k$, N_n d'ordre $\leqq \lambda_2 + \nu_2 q_n$, et le dernier membre de (21) d'ordre au moins égal à

$$\alpha_n - k - \lambda_2 - \nu_2 q_n.$$

Le deuxième membre de (21) étant d'ordre au plus égal à

$$\lambda'(1 + p_n + q_n)$$

d'après (22), (21) est impossible dès que

$$\alpha_n > k + \lambda_2 + \nu_2 q_n + \lambda'(1 + p_n + q_n),$$

ou, *a fortiori*, dès que

$$(23) \qquad \alpha_n > \rho(1 + p_n + q_n),$$

où ρ est limité en fonction de k et des exposants de f.

Dans le cas considéré ici, le théorème se trouve ainsi établi.

2° ξ étant une solution de $f = 0$,

$$(24) \qquad f(x, \mathrm{I}_n, \ldots, \mathrm{I}_n^{(k)}) = 0$$

a lieu à partir d'une certaine valeur de n.

(¹) Au besoin on le vérifierait par dérivation.

a. Je vais d'abord considérer le cas où $f=0$ est une équation linéaire

$$f = b_0 y^{(k)} + b_1 y^{(k-1)} + \ldots + b_k y + b_{k+1} = 0,$$

$b_0, b_1, \ldots, b_{k+1}$ étant des polynomes. On a

$$0 = b_0 \mathrm{I}_n^{(k)} + b_1 \mathrm{I}_n^{(k+1)} + \ldots + b_k \mathrm{I}_n + b_{k+1} + b_0 h_n^{(k)} + \ldots + b_k h_n.$$

Par hypothèse, I_n est solution de l'équation linéaire en question ainsi que ξ.

Alors h_n est solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$b_0 z^{(k)} + b_1 z^{(k-1)} + \ldots + b_k z = 0,$$

mais h_n est formellement développable en une série

$$c_r x^r + c_{r+1} x^{r+1} + \ldots,$$

où r est l'ordre de h_n, c'est-à-dire est aussi grand qu'on veut pour n assez grand. Les degrés de $b_0, \ldots, b_k$ étant fixes et indépendants de n, on est conduit à une impossibilité dès que n est assez grand, d'après le lemme IV précédent.

Le théorème est ainsi complètement établi lorsque $f=0$ est une équation différentielle linéaire.

b. Je prends le cas général : f est ou non linéaire. Ou bien il y a une infinité de valeurs de n telles que $f'_{y^{(k)}}$ s'annule pour $y=\mathrm{I}_n$, ou cela n'a pas lieu.

S'il y a une infinité de valeurs $\mathrm{I}_{n_1}, \mathrm{I}_{n_2}, \ldots$ qui annulent $f'_{y^{(k)}}$, et si $\xi = \mathrm{I}_{n_i} + h_{n_i}$, en substituant ξ à y dans $f'_{y^{(k)}}$, on voit que, pour x infiniment petit, l'ordre infinitésimal du résultat est aussi grand qu'on veut dès que n_i est assez grand [formule analogue à (21)]. Donc ξ serait solution de $f'_{y^{(k)}}=0$, contrairement à l'hypothèse.

Si, à partir d'une certaine valeur de n, I_n n'annule pas $f'_{y^{(k)}}$, ξ ne l'annulant pas non plus, il résulte du lemme II que, parmi les I_n, il ne peut y en avoir qu'un nombre limité satisfaisant à $f=0$, résultat contraire à l'hypothèse. C. Q. F. D.

Le théorème fondamental comporte ce corollaire évident :

Corollaire. — *Lorsque*

$$(25) \qquad |\xi - \mathrm{I}_n| < |x|^{2(1+p_n+q_n)},$$

si grand que soit le nombre fixe arbitraire positif α *dès que* n *est assez grand,* ξ *est une fonction hypertranscendante.*

ξ satisfaisant à (25), soit une autre fonction ξ' analogue à ξ, limite d'une suite de fractions I'_n telles que l'on ait, soit

$$p'_n = k_n p_n, \qquad q'_n = l_n q_n,$$

soit

$$p'_n = k_n q_n, \qquad q'_n = l_n p_n,$$

où k_n et l_n sont limités supérieurement et inférieurement quel que soit n : on a encore par hypothèse

$$|\xi' - I'_n| < |x|^{\alpha(1+p'_n+q'_n)},$$

dès que n est assez grand. Les deux fonctions ξ, ξ' seront dites *correspondantes.*

Soit E_1 l'ensemble des fonctions correspondant à ξ et des fractions rationnelles. On voit successivement les propriétés suivantes :

Deux fonctions ξ', ξ'' correspondant à une même troisième ξ se correspondent entre elles; la somme de ξ' et d'une fraction rationnelle F, le produit $F\xi'$ appartiennent à E_1; la somme ou la différence $\xi' \pm \xi''$ appartient à E_1; les dérivées successives de ξ', le produit $\xi'\xi''$, le quotient $\xi'\xi''^{-1}$ appartiennent à E_1.

En ce qui concerne le quotient, il suffira de s'assurer que ξ^{-1} fait partie de E_1. Or

$$\xi = I_n + h_n,$$
$$\xi^{-1} - I_n^{-1} = (I_n - \xi)(\xi I_n)^{-1} = -h_n(\xi I_n)^{-1};$$

ξ^{-1} est la limite de la suite des fractions I_n^{-1} de degrés $p'_n = q_n$, $q'_n = p_n$ au numérateur et au dénominateur, et ξ^{-1} correspond à ξ.

Finalement, on conclut de là ce théorème :

Théorème VII. — *Toute fonction rationnelle de* x *et de fonctions de* E_1 *appartient à* E_1 ; *en particulier, toute fonction rationnelle de* x, ξ, ξ', ... *et leurs dérivées appartient à* E_1 (¹).

Il est, semble-t-il, difficile d'obtenir une analogie plus complète

(¹) L'ensemble T des fonctions qui sont solutions des équations différentielles rationnelles jouit de propriétés semblables.

avec les considérations du Chapitre III. Le théorème fondamental VI paraît ainsi susceptible d'applications tout à fait analogues à celle du théorème fondamental de Liouville (Chap. II) sur les nombres transcendants. Mais je ne m'étendrai pas davantage sur ce point.

Je remarquerai néanmoins que le théorème VI permet de retrouver le théorème III et ses conséquences.

Je suppose, en effet, $\xi = \left(\sum_0^\infty a_m x^{\varpi_m}\right)\left(\sum_0^\infty b_m x^{\varpi'_m}\right)^{-1}$, où, pour une infinité de valeurs m' de m, $\varpi_{m+1}\varpi_m^{-1} > \alpha'$, $\varpi'_{m+1}\varpi'^{-1}_m > \alpha'$, si grand que soit le nombre positif α' donné *a priori*, et $\varpi'_m = g_m \varpi_m$, $g_m > 0$ et limité supérieurement et inférieurement : ξ est la limite des fractions

$$I_m = \left(\sum_0^m a_n x^{\varpi_n}\right)\left(\sum_0^m b_n x^{\varpi'_n}\right)^{-1},$$

quand m croît indéfiniment; d'ailleurs $\xi - I_m$ est de l'ordre de $x^{\varpi_{m+1}-\mu}$ ou $x^{\varpi'_{m+1}-\mu}$ au moins (μ constante). Ici $p_m = \varpi_m$, $q_m = \varpi'_m$; $\varpi_{m+1}(\varpi_m + \varpi'_m)^{-1}$, $\varpi'_{m+1}(\varpi_m + \varpi'_m)^{-1}$ croissent indéfiniment avec m. D'après le théorème VI, si ξ n'est pas une fonction rationnelle, c'est une fonction hypertranscendante : on retrouve ainsi comme cas particulier le théorème III.

On considérera les fonctions ξ' analogues, quotients de deux fonctions correspondant au numérateur de ξ au sens de la page 257. La somme, le produit, le quotient de deux fonctions ξ' sont de même forme et ont mêmes propriétés. Finalement, *on obtient pour l'ensemble* E'_1 *des fonctions* ξ, ξ', ... *et des fractions rationnelles un théorème tout semblable au théorème VII,* et que je me dispense d'énoncer : ce théorème comprend le théorème IV [1].

Remarque. — Soit $f(x)$ une série à coefficients rationnels : si $f(\alpha)$, pour une valeur α rationnelle ou algébrique, est transcendant, il en résulte bien que $f(x)$ est une fonction transcendante. Mais il n'y a pas réciprocité.

---

[1] Il semble qu'il y aurait lieu d'essayer d'obtenir un théorème analogue au théorème VI pour les fonctions ξ limites de fractions I_n telles que $\xi - I_n$ tende suffisamment vite vers 0 (x fini) quand n croît indéfiniment et soit développable en série

Le développement en série d'une fonction rationnelle y à coefficients rationnels a ses coefficients rationnels et est rationnel pour toute valeur rationnelle de x; mais un pareil développement n'est jamais une fonction entière : il est toujours de la forme $x^{-\omega}S(x)$, où $S(x)$ est un polynome ou une série dont le rayon de convergence est limité. Dès lors une fonction entière à coefficients rationnels est toujours une fonction transcendante. On a formé au Chapitre X des fonctions entières à coefficients rationnels qui n'ont que des valeurs rationnelles pour x rationnel.

---

rapidement convergente procédant suivant les puissances croissantes de x dans le voisinage de $x = 0$. Ce serait ici la décroissance des coefficients des développements qui jouerait un rôle.

On peut aussi considérer des ensembles analogues à E_1, E'_1, mais moins généraux, qui jouissent néanmoins de propriétés semblables, par analogie avec ce qui a été indiqué à propos du théorème IV et de l'ensemble E [note (1), p. 257)]. Ainsi on pourra spécifier que ξ est le quotient de deux fonctions entières $\sum a_m x^{\varpi_m}$, $\sum b_m x^{\varpi'_m}$, c'est-à-dire une fonction méromorphe, etc.

FIN.

BIBLIOGRAPHIE (¹).

I. — *Nombres transcendants.*

Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band I, Heft 5, Leipzig, Teubner, 1900, p. 669 (édition allemande), et les travaux des auteurs qui y sont cités, en particulier : Liouville, *Journ. de Math.*, t. XVI, 1851, p. 133; Hermite, Lindemann, Hilbert, Hurwitz, P. Gordan, Rouché, Mertens, P. Stäckel. — *Voir* aussi l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (J. Molk).

BACHMANN, *Vorles. über die Natur der Irrationalzahlen*, Leipzig, Teubner, 1892.

STIELTJES. Sur la fonction exponentielle (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. CX, 10 février 1890. p. 267).

E. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars, 1898) (où l'on trouvera des notions sur la théorie des ensembles de M. G. Cantor).

E. BOREL, Sur la nature arithmétique du nombre *e* (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. CXXVIII, 6 mars 1899, p. 596).

C. STÖRMER, Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques (*Bull. Soc. Math.*, t. XXVIII, 1900, p. 146).

KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (rédaction Tägert), Leipzig, Teubner, 1895, 66 pages, ou *Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire* (rédaction Griess), Paris, Nony, 1896, 100 pages.

P. STAECKEL, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 20 et 27 mars 1899.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes (publiée par MM. B. Baillaud et H. Bourget), Paris, Gauthier-Villars, 1905, t. I et II, passim.

E. MAILLET : Racines des équations transcendantes (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, avril 1901, et *J. de Math.*, 1901). Équations et nombres transcendants, nombres *e* et π et équations transcendantes (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 9 et 23 décembre 1901; *Acta Mathematica*, t. XXIX). Propriétés arithmétiques des fonctions entières (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, mai 1902; *Bull. Soc. Math.*, 1902). Fonctions monodromes et nombres trans-

(¹) On trouve déjà bon nombre des indications biliographiques utiles dans le corps de mon Ouvrage. Je ne consacre aucun article spécial aux sujets d'études que peuvent suggérer ce qui précède : j'en ai indiqué un assez grand nombre (p. V, 11, 39, 41, 45, 47, 53, 118, 125, 131, 139-140, 161-164, 170, 171, 177, 178, 193-196, 200-202, 205-206, 211, 217, 227, 231, 235, 237, 251, 257, 260, 271-272.

cendants, nombres quasi-rationnels et fractions quasi-périodiques (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 1er et 15 février 1904; *J. de Math.*, 1904). Sur les nombres transcendants, etc. (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 28 août 1905, 12 février, 2 avril, 2 juillet 1906); *Mém. et C. R. du Congrès de Lyon* (Ass. franç. pour l'avanc. des Sc., 1906); *Bull. Soc. Math.*, 1906.

G. Remoundos, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 1904-1905, en particulier 16 janvier 1905, p. 135 et 8 mai 1905, p. 1231.

II. — *Fonctions entières, quasi-entières, etc.* (¹).

Hadamard, Étude sur les propriétés des fonctions entières, etc. (*J. de Math.*, 4e série, t. IX, 1893).

E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, Gauthier-Villars, 1900.

E. Maillet, Mémoires précités, et : Fonctions entières, fonctions quasi-entières (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 3 et 17 février 1902; *J. de Math.*, 1902). Lignes de décroissance maxima des modules, etc. (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 3 mars 1902; *J. École Polytechnique*, 1903). Fonctions entières et quasi-entières, équations différentielles (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 1er sept. 1902; *Annales Fac. Sc. Toulouse*, 1902). Fonctions monodromes à point essentiel (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 24 nov. 1902; *Bull. Soc. Math.*, 1903). Fonctions entières d'ordre infini et équations différentielles, fonctions entières d'ordre zéro, fonctions monodromes et équations différentielles (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 9 févr., 17 août, 21 sept. 1903; *J. École Polytechnique*, 1904 et 1905). Zéros des fonctions entières d'ordre infini non transfini (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 30 janvier et 6 février 1905; *Annales École Normale*, 1906).

Voir encore les travaux de MM. Hadamard, Borel, P. Boutroux, E. Lindelöf, Mittag-Leffler, Jensen, Goursat, Wiman, G. Remoundos, E. Landau, Leau, Pincherle, Vivanti, O. Blumenthal, Pellet, A. Kraft, A. Auric, Fouët, etc., et l'*Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band I, Heft 5, p. 660 (ou encore l'édition française).

III. — *Fonctions hypertranscendantes.*

Heinrich Tietze, *Monatshefte für Math. und Phys.*, 16e année, p. 331, et la Bibliographie contenue dans cet article (travaux de MM. Moore, Hölder, Hilbert, Painlevé, Gomes-Teixera, Hurwitz, Grönwall, E. Maillet, Barnes, etc.).

E. Maillet, Equations différentielles rationnelles, fonctions transcendantes (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, nov. 1901; *J. de Math.*, 1901). Équations différentielles et théorie des ensembles (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 8 sept. 1902; *Bull. Soc. Math.*, 1902).

(¹) Je ne donne ici que les indications *sommaires* utiles à ceux qui voudraient étudier la théorie en vue des applications aux nombres transcendants. On trouvera d'ailleurs dans les œuvres ci-après de nombreuses indications bibliographiques.

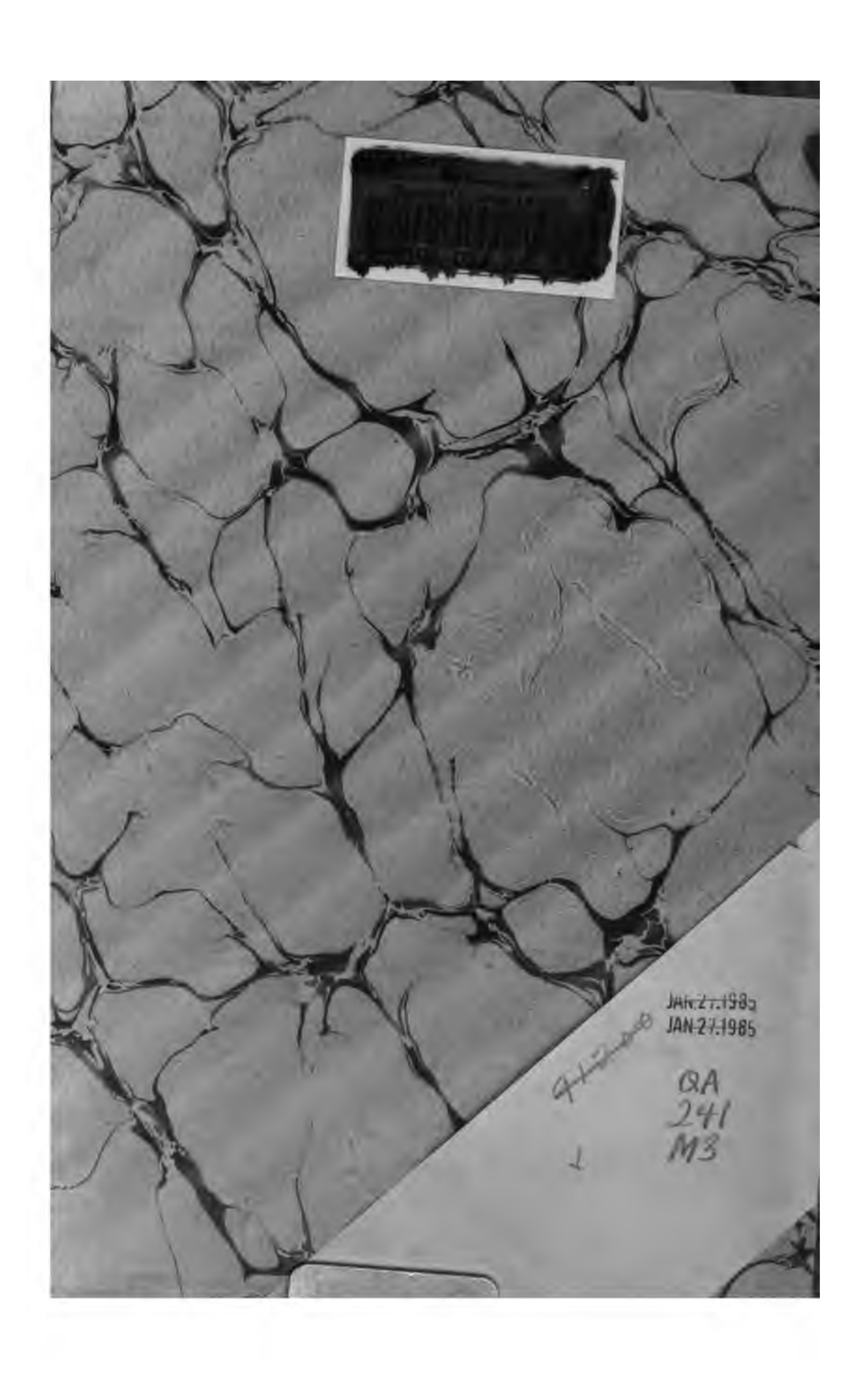
TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

38145 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

5"
p. 221




JAN 27 1985
JAN 27 1985
QA
241
M3

